Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

В.Л. ФАЙНШМИДТ, Н.В. ТАРАСОВА

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 517.958(075.8)
Ф 17

Файншмидт, В.Л.
Ф 17 Некоторые уравнения математической физики: учебное пособие /В.Л.Файншмидт, Н.В. Тарасова; Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2016. — 119 с.
ISBN 978-5-85546-924-0

Пособие соответствует программе курса математической физики. В нем излагаются наиболее часто встречающиеся способы решения уравнений в частных производных. Теоретические сведения проиллюстрированы примерами.

Предназначено для студентов, изучающих механику сплошных сред.

УДК 517.958(075.8)

Рецензент д-р физ.-мат. наук проф. каф. мат. физики мат.–мех. ф–та СПбГУ *В.М. Бабич*

Утверждено редакционно-издательским советом университета

ISBN 978-5-85546-924-0

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этом разделе мы напомним некоторые понятия и факты, связанные с функциями нескольких аргументов и векторами. Поскольку этот материал излагается в общем курсе высшей математики, постольку не будем приводить доказательств тех утверждений, которые нам понадобятся. Как обычно, трехмерное пространство будем обозначать $\mathbb{R}_3$, а двумерное – $\mathbb{R}_2$.

Начнем с понятий, связанных с дифференцированием.

Оператором Гамильтона или оператором набла в декартовых координатах в пространстве $\mathbb{R}_3$ называют выражение

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}.$$

Градиентом функции $U(x, y, z)$ называют вектор

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}$$

Градиент функции U можно записать как символическое произведение вектора ∇ на U :

$$\text{grad } U = \nabla\, U.$$

П р и м е р.

$$\text{grad } (xyz) = \frac{\partial(xyz)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\overline{k} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}.$$

Функцию U называют потенциалом вектора grad U .

Дивергенцией (или расходимостью) вектора

$$\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$$

называется величина

$$\text{div } \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Эту величину можно записать как символическое скалярное произведение векторов ∇ и $\overline{F}$:

$$\mathrm{div}\overline{F} = \nabla\overline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)(P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

П р и м е р. Найдем дивергенцию векторного поля

$$\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} + (y^2 + z^2)\overline{j} + (z^2 + x^2)\overline{k}.$$

Так как $P = x^2 + y^2$, $Q = y^2 + z^2$, $R = z^2 + x^2$, то

$$\mathrm{div}\ \overline{F} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial z} = 2(x + y + z).$$

В пространстве $\mathbb{R}_2$ оператор ∇ имеет вид

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j}.$$

В соответствии с этим оказывается

$$\mathrm{grad}\ U = \nabla\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j},$$

$$\mathrm{div}\ \overline{F} = \nabla\ \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Мы рассмотрели дифференциальные операции первого порядка, однако во многих задачах нам придется встретить дифференциальные операции второго порядка. Остановимся на одной из них:

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ U = \nabla(\nabla\ U) = \nabla^2\ U =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)U =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Выражение

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют оператором Лапласа.

П р и м е р.

$$\Delta(x^3y^3z^3) = \frac{\partial^2(x^3y^3z^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^3y^3z^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^3y^3z^3)}{\partial z^2} =$$

$$= 6xyz(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2).$$

Очевидно, что в пространстве $\mathbb{R}_2$ оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В заключение этого раздела напомним еще формулу Гаусса–Остроградского: если $\overline{F}$ – вектор , T – тело, ограниченное поверхностью S , то

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} \overline{F} dV = \iint\limits_S F_n d\sigma,$$

где F_n – проекция вектора $\overline{F}$ на внешнюю нормаль к поверхности S .

2. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНЫХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В этом и последующих разделах мы будем использовать такие обозначения производных, которые приняты в математической физике. Именно, вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ мы будем писать f_x , вместо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ – f_{xy} и т.д.

Предположим, что на плоскости, кроме декартовых, имеются еще полярные координаты (ρ, φ) , связанные с декартовыми равенствами $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$ (рис. 1), и выясним, как записывается оператор Лапласа в этих координатах.

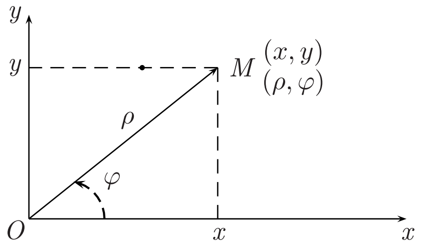

Рис. 1. Полярные координаты

Для этого вначале найдем выражения для первых и вторых производных от ρ и φ по x и по y.

Так как $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, то

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \rho_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \rho_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi.$$

Поскольку $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в первом и четвертом квадрантах и отличается от $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ лишь на $\pm\pi$ в других квадрантах, постольку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Далее

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \rho_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sin^2\varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \rho_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = \rho_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \varphi_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \varphi_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\rho^2}.$$

Пусть теперь дана некоторая функция $U(\rho,\varphi)$. Найдем выражение для $U_{xx} + U_{yy}$. Получаем последовательно

$$U_x = U_\rho\rho_x + U_\varphi\varphi_x, \quad U_y = U_\rho\rho_y + U_\varphi\varphi_y,$$

$$U_{xx} = U_{\rho\rho}\rho_x^2 + U_\rho\rho_{xx} + 2U_{\rho\varphi}\varphi_x\rho_x + U_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + U_\varphi\varphi_{xx},$$

$$U_{yy} = U_{\rho\rho}\rho_y^2 + U_\rho\rho_{yy} + 2U_{\rho\varphi}\varphi_y\rho_y + U_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + U_\varphi\varphi_{yy},$$

$$U_{xx} + U_{yy} = U_{\rho\rho}(\rho_x^2 + \rho_y^2) + U_\rho(\rho_{xx} + \rho_{yy}) + 2U_{\rho\varphi}(\varphi_x\rho_x + \varphi_y\rho_y) +$$

$$+ U_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + U_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}).$$

Подставив в правую часть последнего равенства значения производных от ρ и φ по x и y , получим

$$U_{xx} + U_{yy} = U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi}.$$

В развернутом виде это равенство выглядит так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Значит, оператор Лапласа в полярных координатах записывается следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

В пространстве наиболее часто наряду с декартовой используют цилиндрическую и сферическую системы координат.

В цилиндрической системе координат, показанной на рис. 2, каждая точка M характеризуется тройкой чисел (ρ,φ,z) .

Здесь ρ – длина вектора $\overline{OM'}$, где M' – проекция точки M на плоскость xOy ; φ – угол между осью Ox и вектором $\overline{OM'}$; а z – то же, что и в декартовой системе.

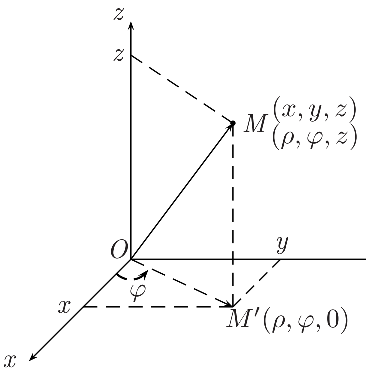

Рис. 2. Цилиндрические координаты

Нетрудно заметить, что цилиндрические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Ясно , что эта система состоит из полярных координат (ρ, φ) на плоскости xOy и добавленной к ним декартовой координаты z . Поэтому оператор Лапласа в этой системе будет таким:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Обратимся к сферическим координатам (рис. 3), в которых каждая точка пространства описывается тройкой чисел (r, ϑ, φ).

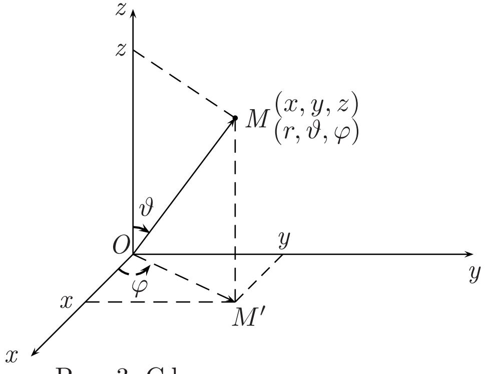

Рис. 3. Сферические координаты

В этой тройке $r = |\overline{OM}|$ – расстояние точки M от начала координат, ϑ – угол между осью Oz и вектором $\overline{OM}$, φ – угол между осью Ox и вектором $\overline{OM'}$, где M' – проекция точки M на плоскость xOy (см. рис. 3).

Декартовы и сферические координаты связаны равенствами

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет такой вид:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}(U_r r^2)_r + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}(U_\vartheta \sin\vartheta)_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}U_{\varphi\varphi}.$$

Мы не доказываем это равенство, поскольку способ его доказательства тот же, что и для полярных координат, но требует гораздо более длинных преобразований.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

В этом разделе мы обобщим указанные ранее результаты.

Если каждой точке M в пространстве $\mathbb{R}_3$ ставится в соответствие определенная тройка чисел (ξ, η, ζ) и, наоборот, каждой такой тройке чисел соответствует одна определенная точка M, то говорят, что в пространстве задана система координат.

Множество точек пространства, у которых одна из координат постоянна, называют координатной поверхностью. В каждой системе координат существуют три семейства координатных поверхностей, определяемых равенствами $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$.

В декартовой системе координатные поверхности являются плоскостями, перпендикулярными координатным осям, так как они определяются равенствами $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

В цилиндрических системе координатные поверхности задают равенства $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. Эти поверхности оказываются, соответственно, цилиндрами, осью которых является ось Oz, полуплоскостями, опирающимися на ось Oz, и плоскостями, перпендикулярными оси Oz.

В сферической системе координатные поверхности $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ представляют собой сферы, конусы и полуплоскости.

При пересечении двух координатных поверхностей из разных семейств образуется координатная линия. Очевидно, что на ней изменяется лишь одна координата, а две другие постоянны. Например, на координатной линии, образованной пересечением двух поверхностей $\xi =$ const и $\eta =$ const, меняется лишь координата ζ .

В декартовой системе координатные линии – прямые, параллельные осям координат.

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии. Если при пересечении во всех точках пространства эти линии взаимно ортогональны, то система координат называется ортогональной. Очевидно, что декартовы, цилиндрические и сферические координаты ортогональны.

Перейдем теперь к выяснению того, как записываются в ортогональных координатах введенные раньше дифференциальные операции. Для этого прежде всего заметим, что если в пространстве имеются система декартовых координат (x, y, z) и какая-нибудь другая система (ξ, η, ζ) , то каждой тройке (ξ, η, ζ) соответствует одна тройка (x, y, z) и наоборот. Значит, мы можем написать, что

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

и

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z).$$

Теперь возьмем какую-нибудь точку $M(\xi, \eta, \zeta)$. Через нее, как уже говорилось, проходят три координатные линии. Рассмотрим линию, на которой постоянны η и ζ , изменяется лишь ξ . Назовем ее l_1 . Ясно, что дифференциал дуги этой линии dl_1 должен быть пропорционален $d\xi$, т.е должен иметь вид $dl_1 = H_1(\xi, \eta, \zeta)d\xi.$

Для нахождения H_1 , вспомним, что в декартовых координатах $dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Так как на линии l_1 изменятся лишь ξ , то должно быть $dx = x_\xi d\xi$, $dy = y_\xi d\xi$, $dz = z_\xi d\xi$. Следовательно, $dl_1 = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}\ d\xi,$ откуда $H_1 = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}$.

Аналогичным образом для двух других координатных линий у нас получится $dl_2 = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2} d\eta$ и $dl_3 = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2} d\zeta$.

Величины

$$H_1(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}, \quad H_2(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2},$$

$$H_3(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2}$$

называют коэффициентами Ламе.

Если l – какая-нибудь линия, проходящая через $M(\xi,\eta,\zeta)$, то, учитывая ортогональность координатных линий в этой точке, по теореме Пифагора получаем

$$dl = \sqrt{dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2} = \sqrt{H_1^2 d\xi^2 + H_2^2 d\eta^2 + H_3^2 d\zeta^2}.$$

П р и м е р 1. Найдем коэффициенты Ламе и дифференциал линии в цилиндрических координатах (ρ,φ,z).

Мы знаем, что

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Поэтому

$$H_1 = \sqrt{x_\rho^2 + y_\rho^2 + z_\rho^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0^2} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi^2 + \rho^2\cos^2\varphi + 0^2} = \rho,$$

$$H_3 = \sqrt{x_z^2 + y_z^2 + z_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Итак, $H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1$. Отсюда

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим сферические координаты (r,θ,φ).

Так как

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

то

$$H_1 = \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2} =$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 0^2} = r \sin \theta.$$

Следовательно,

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Выясним, как находится градиент в ортогональных координатах. Пусть имеется некоторая функция U, градиент которой мы хотим найти. Возьмем какую-нибудь точку $M(\xi, \eta, \zeta)$ и рассмотрим проходящие через нее координатные линии l_1, l_2, l_3. Построим в M единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям. Обозначим эти векторы соответственно $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Очевидно, что орты взаимно ортогональны. Теперь разложим grad U по этим ортам:

$$\text{grad } U = A_1 \overline{e}_1 + A_2 \overline{e}_2 + A_3 \overline{e}_3.$$

Так как A_1, A_2, A_3 являются проекциями градиента на направления l_1, l_2, l_3, то, в силу свойства градиента, должно быть

$$A_1 = \frac{\partial U}{\partial l_1}, \quad A_2 = \frac{\partial U}{\partial l_2}, \quad A_3 = \frac{\partial U}{\partial l_3}$$

.

Мы уже говорили, что $dl_1 = H_1 d\xi$, $dl_2 = H_2 d\eta$, $dl_3 = H_3 d\zeta$. Поэтому

$$A_1 = \frac{\partial U}{\partial 1_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad A_2 = \frac{\partial U}{\partial 1_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad A_3 = \frac{\partial U}{\partial l_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Итак,

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial \xi} \overline{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial \eta} \overline{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \overline{e}_3 =$$

$$= \frac{1}{H_1} U_\xi \overline{e}_1 + \frac{1}{H_2} U_\eta \overline{e}_2 + \frac{1}{H_3} U_\zeta \overline{e}_3.$$

Теперь получим формулу для дивергенции. Пусть имеется вектор $\overline{F}(\xi, \eta, \zeta)$. Как и раньше, возьмем какую-нибудь точку $M(\xi, \eta, \zeta)$ и проведем через нее координатные линии l_1, l_2 и l_3. Затем построим элементарную ячейку, т.е тело, ограниченное тремя парами близких координатных поверхностей. На этих поверхностях постоянны соответственно величины ξ, $\xi+d\xi$, η, $\eta+d\eta$, ζ, $\zeta+d\zeta$. Назовем ячейку T, а ее поверхность S. По формуле Гаусса–Остроградского должно быть

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} \overline{F} dV = \iint\limits_S F_n d\sigma,$$

где F_n – проекция вектора $\overline{F}$ на внешнюю нормаль к поверхности. Так как координатные линии ортогональны, то объем этой ячейки

$$\Delta V = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 d\xi d\eta d\zeta + o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Поэтому, в силу малости ячейки, тройной интеграл можем записать в виде

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} \overline{F} dV + o(d\xi d\eta d\zeta) = \operatorname{div} F(\xi,\eta,\zeta) H_1 H_2 H_3 d\xi d\eta d\zeta + o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Обозначим через P, Q и R проекции $\overline{F}(\xi,\eta,\zeta)$ на направления линий l_1, l_2 и l_3 и обратимся к правой части формулы Гаусса–Остроградского. Очевидно, что S состоит из шести граней. Рассмотрим пару граней S_1 и S_2, отвечающих значениям $\xi =$ const и $\xi + d\xi =$ const. Понятно, что

$$\iint\limits_{S_1} F_n d\sigma + \iint\limits_{S_2} F_n d\sigma = -\iint\limits_{S_1} P d\sigma + \iint\limits_{S_2} P d\sigma.$$

Площади этих граней с точностью до бесконечно малых более высокого порядка равны соответственно

$$H_2(\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi,\eta,\zeta))d\eta d\zeta \quad \text{и} \quad H_2(\xi+d\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi+d\xi,\eta,\zeta))d\eta d\zeta.$$

Так как площади малы, то каждый из интегралов заменим приближенно произведением подынтегральной функции на площадь. Получим

$$-\iint\limits_{S_1} P d\sigma + \iint\limits_{S_2} P d\sigma \approx$$

$$\approx (-P(\xi,\eta,\zeta)H_2(\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi,\eta,\zeta)+$$

$$+P(\xi+d\xi,\eta,\zeta)H_2(\xi+d\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi+d\xi,\eta,\zeta))d\eta d\zeta.$$

Стоящую в правой части разность заменим ее дифференциалом:

$$P(\xi+d\xi,\eta,\zeta)H_2(\xi+d\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi+d\xi,\eta,\zeta)-$$

$$-P(\xi,\eta,\zeta)H_2(\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi,\eta,\zeta)\approx$$

$$\approx(P(\xi,\eta,\zeta)H_2(\xi,\eta,\zeta)H_3(\xi,\eta,\zeta))_\xi d\xi=(PH_2H_3)_\xi d\xi$$

(здесь в последних скобках и в дальнейшем для удобства чтения не пишем аргументы ξ, η, ζ).

Итак, мы можем написать, что

$$\iint\limits_{S_1}F_nd\sigma+\iint\limits_{S_2}F_nd\sigma=(PH_2H_3)_\xi d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Для двух оставшихся пар граней таким же способом получим

$$\iint\limits_{S_3}F_nd\sigma+\iint\limits_{S_4}F_nd\sigma=(QH_1H_3)_\eta d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta),$$

$$\iint\limits_{S_5}F_nd\sigma+\iint\limits_{S_6}F_nd\sigma=(RH_1H_2)_\zeta d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Сложив последние три равенства:

$$\iint\limits_{S}F_nd\sigma=((PH_2H_3)_\eta+(QH_1H_3)_\eta+(RH_1H_2)_\zeta)d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Таким образом, формула Гаусса–Остроградского в нашем случае принимает вид

$$\operatorname{div}\overline{F}\ H_1H_2H_3d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta)=$$

$$=(PH_2H_3)_\xi+(QH_1H_3)_\eta+(RH_1H_2)_\zeta)d\xi d\eta d\zeta+o(d\xi d\eta d\zeta).$$

Разделив обе части равенства на $d\xi d\eta d\zeta$ и перейдя к пределу при $d\xi$, $d\eta$ $d\zeta$, стремящихся к нулю, получим

$$\operatorname{div}\overline{F}\ H_1H_2H_3=(PH_2H_3)_\xi++(QH_1H_3)_\eta+(RH_1H_2)_\zeta,$$

откуда

$$\operatorname{div}\overline{F}=\frac{1}{H_1H_2H_3}((PH_2H_3)_\xi++(QH_1H_3)_\eta+(RH_1H_2)_\zeta).$$

Нетрудно получить запись оператора Лапласа в ортогональных координатах. Действительно, мы знаем, что

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1}U_\xi \overline{e}_1 + \frac{1}{H_2}U_\eta \overline{e}_2 + \frac{1}{H_3}U_\zeta \overline{e}_3.$$

Поэтому, полагая $P = \dfrac{1}{H_1}U_\xi$, $Q = \dfrac{1}{H_2}U_\eta$ и $R = \dfrac{1}{H_3}U_\zeta$ в формуле для дивергенции, получим

$$\Delta U = \text{div grad } U =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\left(\frac{U_\xi H_2 H_3}{H_1}\right)_\xi + \left(\frac{U_\eta H_1 H_3}{H_2}\right)_\eta + \left(\frac{U_\zeta H_1 H_2}{H_3}\right)_\zeta\right).$$

П р и м е р. В сферической системе координат (r, θ, φ) , как мы видели, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin\theta$. Поэтому

$$\Delta\, U = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left((U_r r^2 \sin\theta)_r + (U_\theta \sin\theta)_\theta + \left(\frac{U_\varphi}{\sin\theta}\right)_\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}(U_r r^2)_r + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}(U_\vartheta \sin\vartheta)_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}U_{\varphi\varphi}.$$

Эта формула приведена без вывода в предыдущем разделе.

4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Начнем с нескольких важных для дальнейшего определений.

Интегрируемую функцию $\rho(x)$ будем называть весовой функцией или весом на промежутке $[a, b]$, если она всюду на этом промежутке положительна, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она равна нулю.

Примерами весовых функций могут служить $\rho(x) = \sqrt{1 - x^2}$ при $x \in [-1, 1]$ или $\rho(x) = 1$ при $x \in [0, 1]$.

Скалярным произведением с весом $\rho(x)$ на промежутке $[a, b]$ функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называют

$$\int\limits_a^b \rho(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx.$$

Предполагается, естественно, что этот интеграл существует.

В дальнейшем будем для краткости обозначать скалярное произведение символом (φ_1, φ_2).

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются ортогональными с весом $\rho(x)$ на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке их скалярное произведение (φ_1, φ_2) равно нулю.

Иначе говоря, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются ортогональными с весом $\rho(x)$ на промежутке $[a, b]$, если выполняется равенство

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0.$$

Величину

$$\sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\int_a^b \rho(x)\varphi^2(x)dx}$$

называют нормой функции $\varphi(x)$ на промежутке $[a, b]$ и обозначают $||\varphi||$.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана последовательность функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ таких, что $||\varphi_k|| \neq 0$. Эта последовательность называется ортогональной на $[a, b]$, если любые две ее функции ортогональны на этом промежутке, т. е. $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $k \neq m$.

Предположим, что на $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и ортогональная последовательность $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$. Мы хотим разложить $f(x)$ в ряд, составленный из членов ортогональной последовательности, т.е. хотим записать $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x).$$

Выясним, как можно найти коэффициенты ряда. Для этого возьмем какую-нибудь функцию $\varphi_m(x)$ и умножим на нее скалярно обе части равенства:

$$(f, \varphi_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varphi_k, \varphi_m).$$

Так как система ортогональна, то в правой части останется лишь то слагаемое, в котором $k = m$. Поэтому равенство примет вид

$(f, \varphi_m) = c_m(\varphi_m, \varphi_m) = c_m||\varphi_m||^2$, откуда $c_m = \dfrac{(f, \varphi_m)}{||\varphi_m||^2}$.

Поскольку m может принимать любые значения, постольку ясно, что мы получили правило нахождения коэффициентов ряда: если функция $f(x)$ раскладывается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

то коэффициенты ряда находятся по формуле

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{||\varphi_k||^2} = \frac{\int\limits_a^b \rho(x) f(x) \varphi_k(x) dx}{\int\limits_a^b \rho(x) \varphi_k^2(x) dx}.$$

Эти коэффициенты называют обобщенными коэффициентами Фурье, ряды с такими коэффициентами – обобщенными рядами Фурье или рядами Фурье по ортогональной системе функций.

Простейшей ортогональной системой является тригонометрическая система, содержащая заданные при всех $x \in R$ функции

$$\{1,\ \sin \omega x, \cos \omega x, \sin 2\omega x, \cos 2\omega x, ...\},$$

каждая из которых описывает элементарное гармоническое колебание. При этом у всех функций имеется общий период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Легко доказать (это делается в общем курсе математики), что эта система ортогональна с весом $\rho = 1$ на любом промежутке вида $[\alpha, \alpha + T]$, где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Разложения в ряд по тригонометрической системе обычно записывают как

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x,$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos k\omega x dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin k\omega x dx.$$

Такие ряды называются тригонометрическими рядами Фурье или просто рядами Фурье.

Разложение периодической функции в ряд Фурье имеет очень простой физический смысл: всякий реально встречающийся периодический процесс можно представить в виде суммы элементарных гармонических колебаний. Частоты этих колебаний образуют спектр процесса.

П р и м е р. Рассмотрим функцию $f(x)$, график которой приведен на рис. 4.

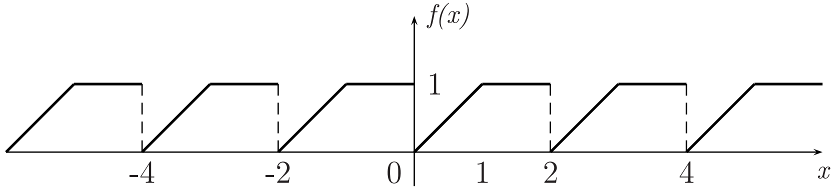

Рис. 4

Из рисунка видно, что $f(x)$ имеет период $T = 2$ и при этом

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Так как период функции $T = 2$, то $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi.$ В формулах, по которым находятся коэффициенты a_k и b_k, возьмем $\alpha = 0$. Получим

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)dx = \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_1^2 dx = \frac{3}{2};$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}dx = \int\limits_0^1 x\cos k\pi x dx +$$

$$+\int\limits_1^2 \cos k\pi x dx = x\,\frac{1}{k}\sin k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k}\int\limits_0^1 \sin k\pi x dx +$$

$$+\frac{1}{k}\sin k\pi x\Big|_1^2 = \frac{1}{k^2}\cos k\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{(-1)^k - 1}{k^2};$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\sin k\omega x dx = \int\limits_0^1 x\sin k\pi x dx + \int\limits_1^2 x\sin k\pi x dx =$$

$$= -x\,\frac{1}{k}\cos k\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{k}\int\limits_0^1 \cos k\pi x dx - \frac{1}{k}\cos k\pi x\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{k}\cos k\pi + \frac{1}{k^2}\sin k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\cos k\pi = \frac{1}{k}.$$

Итак,

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos k\pi x + \frac{1}{k}\sin k\pi x.$$

Добавим к сказанному следующее. На промежутке $[0, l]$ будет ортогональной (с весом $\rho = 1$), как нетрудно показать, такая система

$$\left\{\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{3\pi x}{l},\ ...\right\}.$$

Ряд Фурье, соответствующий этой системе, имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Другой системой, ортогональной с весом $\rho = 1$ на промежутке $[0, l]$, является

$$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \cos\frac{3\pi x}{l},\ ...\right\}.$$

Отвечающий этой системе ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx.$$

П р и м е р . Разложим в ряд по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0,2], \\ 4 - x & \text{при } x \in [2,4]. \end{cases}$$

В нашем случае $l = 4$, а потому

$$b_k = \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^2 x \sin \frac{k\pi x}{4} dx + \int\limits_2^4 (4-x) \sin \frac{k\pi x}{4} dx \right).$$

Интегрируя по частям получаем

$$b_k = \frac{1}{2} \left(-x \frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{4} \bigg|_0^2 + \frac{16}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{4} \bigg|_0^2 + \right.$$

$$\left. - (4-x) \frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{4} \bigg|_2^4 - \frac{16}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{4} \bigg|_2^4 \right) = \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

При четных значениях k, т.е. при $k = 2m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$, оказывается $b_{2m} = 0$. Если k – нечетное, т.е. $k = 2m+1$ $(m = 0, 1, 2, ...)$, то

$$b_{2m+1} = \frac{16}{\pi^2 (2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} = \frac{16}{\pi^2 (2m+1)^2} \cos m\pi =$$

$$= \frac{16(-1)^m}{\pi^2 (2m+1)^2}.$$

Следовательно, разложение нашей функции в ряд таково:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16(-1)^m}{\pi^2 (2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{4}.$$

Заметим, что функцию, зависящую от двух аргументов, можно раскладывать в двойные ряды Фурье. Например, если непрерывная функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $\{0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2\}$, то ее можно представить в виде

$$f(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km} \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

где

$$f_{km} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x,y) \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2}\, dxdy.$$

Можно также заданную в таком прямоугольнике функцию разложить в ряд по функциям $\cos\dfrac{k\pi x}{l_1}\cos\dfrac{m\pi y}{l_2}$ $(k,m = 0,1,...)$.

Интересно, что ряды, составленные из тригонометрических функций, использовались при решении физических задач еще в первой половине XVIII в. Например, в сороковых годах этого века Даниил Бернулли предлагал описывать колебания струны с помощью тригонометрических рядов. Формулы, по которым находятся коэффициенты тригонометрических рядов, были впервые получены Алексисом Клодом Клеро и опубликованы им в 1754 г. Позже независимо от него эти же формулы опубликовал в 1777 г. Леонард Эйлер. Однако все, кто использовал тригонометрические ряды, считали, что в них можно раскладывать только непрерывные функции. Лишь в начале XIX века Жан Батист Жозеф Фурье показал, что в тригонометрические ряды можно раскладывать и разрывные функции.

5. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Дифференциальным уравнением Бесселя называют следующее:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0.$$

Здесь y - функция от x, которую мы хотим найти, а s - некоторая константа. Попробуем построить решение $y(x)$ с помощью степенного ряда. Вначале рассмотрим подробно случай, когда $s = 0$. В этом случае уравнение имеет вид

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Ищем решение последнего уравнения в форме

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ...$$

и

$$y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + 5 \cdot 4c_5 x^3 + ...$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получаем

$$x(2c_2 + 3 \cdot 2\ c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + 5 \cdot 4c_5 x^3 + ...)+$$

$$+c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ... + x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...) = 0$$

или

$$c_1 + (2c_2 + 2c_2 + c_0)x + (3 \cdot 2\ c_3 + 3c_3 + c_1)x^2 + (4 \cdot 3c_4 + 4c_4 + c_2)x^3+$$

$$+(5 \cdot 4c_5 + 5c_5 + c_3)x^4 + (6 \cdot 5c_6 + 6c_6 + c_4)x^5 + ... = 0$$

или, наконец,

$$c_1 + (2^2 c_2 + c_0)x + (3^2 c_3 + c_1)x^2 + (4^2 c_4 + c_2)x^3+$$

$$+(5^2 c_5 + c_3)x^4 + (6^2 c_6 + c_4)x^5 + ... = 0.$$

Получили степенной ряд, сумма которого равна нулю при всех x. Ясно, что это может быть лишь тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Следовательно,

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ 2^2 c_2 + c_0 = 0, \\ 3^2 c_3 + c_1 = 0, \\ 4^2 c_4 + c_2 = 0, \\ 5^2 c_5 + c_3 = 0, \\ 6^2 c_6 + c_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

У нас образовалась система, содержащая бесконечно много уравнений с бесконечным множеством неизвестных. Видно, что ее можно разбить на две: в одну включить все уравнения, содержащие коэффициенты с нечетными номерами, в другую - с четными.

Первая система имеет вид

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ 3^2 c_3 + c_1 = 0, \\ 5^2 c_5 + c_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Из равенства $c_1 = 0$ следует $c_3 = 0$, откуда $c_5 = 0$ и т. д., т. е. есть все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю.

Обратимся ко второй системе:

$$\begin{cases} 2^2 c_2 + c_0 = 0, \\ 4^2 c_4 + c_2 = 0, \\ 6^2 c_6 + c_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Решая ее, находим последовательно

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}, \ldots$$

Ясно, что

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2 \ldots (2m)^2} = (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Таким образом,

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^4\ (2!)^2} x^4 - \frac{1}{2^6\ (3!)^2} x^6 + \ldots \right).$$

Как известно, решение однородного линейного дифференциального уравнения остается решением при умножении или делении на постоянную. Поэтому в построенном нами решении можно положить $c_0 = 1$. Таким образом, мы построили решение дифференциального уравнения Бесселя в виде ряда:

$$y = 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^4\ (2!)^2} x^4 - \frac{1}{2^6\ (3!)^2} x^6 + \ldots.$$

или

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m}.$$

Для того чтобы построенный ряд был действительно решением, нужно показать, что он имеет непустую область сходимости. Чтобы найти область сходимости ряда, используем признак Даламбера:

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{x^{2(m+1)}(m!)^2 2^{2m}}{((m+1)!)^2 2^{2(m+1)} x^{2m}}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{x^2}{4(m+1)^2} = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Построенное нами решение принято обозначать $J_0(x)$ и называть функцией Бесселя нулевого порядка, так как она соответствует $s = 0$:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка строится с помощью двух линейно независимых его решений. Значит, нужно еще одно решение, линейно независимое с $J_0(x)$. Не будем его строить, поскольку в нашей задаче оно практически не понадобится. Обозначим его через $N_0(x)$. Тогда общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Приведем без доказательства одно отличие частных решений:

$$\lim_{x\to 0} J_0(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0} N_0(x) = \infty,$$

так что функция $J_0(x)$ оказывается ограниченной в окрестности точки $x = 0$, а $N_0(x)$ – неограниченной.

В общем случае при любом целом значении $s \geqslant 0$ решением уравнения

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0$$

оказывается функция

$$J_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+s},$$

называемая функцией Бесселя s-го порядка.

Обозначив через $N_s(x)$ второе решение уравнения, линейно независимое с $J_s(x)$, построим общее решение:

$$y = C_1 J_s(x) + C_2 N_s(x).$$

Так же, как и при $s = 0$, функции $J_s(x)$ оказываются ограниченными в окрестности точки $x = 0$, а $N_s(x)$ – неограниченными.

Можно показать, что справедливо равенство:

$$J_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{s\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \to \infty).$$

Подробно изложены приведенные нами свойства функции Бесселя, например, в [2].

Заметим, что присвоение имени Бесселя рассмотренному уравнению и его решениям нельзя считать исторически оправданным. Бессель изучал свойства решений в начале XIX века. Вместе с тем еще в тридцатых годах XVIII века Даниил Бернулли построил функцию $J_0(\sqrt{x})$ для решения задачи о колебании тяжелой цепи. Далее, в 1864 г. Эйлер решил задачу о колебаниях круглой мембраны, построив функции $J_n(x)$. В 1770 г. функции $J_n(x)$ использовал Лагранж при изучении движения планет вокруг Солнца.

6. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Можно доказать, что найденная нами функция $J_0(x)$ имеет бесконечно много корней. На это, например, косвенно указывает последняя формула предыдущего раздела. При этом каждому положительному корню отвечает такой же по модулю отрицательный, так как функция $J_0(x)$ четная. Обозначим положительные корни в порядке возрастания $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$

Докажем такое утверждение: система функций

$$\{J_0(\mu_1 x),\ J_0(\mu_2 x),\ J_0(\mu_3 x),\ \ldots\}$$

ортогональна на промежутке $[0, 1]$ с весом x, т.е.

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0 \ \text{ при } k \neq n.$$

Вначале решим дифференциальное уравнение

$$xy'' + y' + \mu^2 xy = 0,$$

где μ – постоянная.

Для этого сделаем замену: $t = \mu x$. Тогда

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \mu, \quad y''_{xx} = y''_{tt}\mu^2,$$

а потому уравнение примет вид

$$\frac{t}{\mu} y''_{tt}\mu^2 + y'_t\mu + \mu^2 \frac{t}{\mu} y = 0$$

или, после упрощения,

$$t y''_{tt} + y'_t + t y = 0.$$

Получили уравнение Бесселя, рассмотренное в предыдущем разделе. Его решением является $y = J_0(t) = J_0(\mu x)$.

Возьмем в нашем уравнении $\mu = \mu_k$, где μ_k – какой-нибудь корень функции $J_0(x)$. Соответствующее ему решение обозначим $y_k(x)$. Ясно, что $y_k(x) = J_0(\mu_k x)$. Поэтому $y_k(1) = J_0(\mu_k) = 0$, так как μ_k – корень $J_0(x)$.

Если мы возьмем μ равным другому корню μ_n функции $J_0(x)$, то точно так же найдем, что $y_n(x) = J_0(\mu_n x)$ и $y_n(1) = J_n(\mu_n) = 0$.

Теперь напишем два уравнения:

$$x y''_k + y'_k + \mu_k^2 x y_k = 0,$$

$$x y''_n + y'_n + \mu_n^2 x y_n = 0.$$

Первое умножим на y_n , а второе на y_k . Затем вычтем полученные равенства:

$$x y''_k y_n - x y''_n y_k + y'_k y_n - y'_n y_k + (\mu_k^2 - \mu_n^2) x y_k y_n = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по промежутку $[0, 1]$:

$$\int\limits_0^1 x y''_k y_n dx - \int\limits_0^1 x y''_n y_k dx + \int\limits_0^1 (y'_k y_n - y'_n y_k) dx + (\mu_k^2 - \mu_n^2) \int\limits_0^1 x y_k y_n dx = 0. \quad (*)$$

В первом из написанных интегралов проведем интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^1 x y''_k y_n dx = x y_n y'_k \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 y'_k (x y_n)' dx = y_n(1) y'_k(1) - \int\limits_0^1 (y_n + x y'_n) y'_k dx.$$

Так как $y_n(1) = 0$, то оказывается

$$\int_0^1 xy_k''y_n dx = -\int_0^1 (y_n + xy_n')y_k' dx.$$

Аналогичным образом получим, что

$$\int_0^1 xy_n''y_k dx = -\int_0^1 (y_k + xy_k')y_n' dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 xy_k''y_n dx - \int_0^1 xy_n''y_k dx = \int_0^1 (y_k y_n' - y_n y_k') dx.$$

Подставив полученное в $(*)$, придем к равенству

$$(\mu_k^2 - \mu_n^2)\int_0^1 xy_k y_n dx = 0.$$

Так как $\mu_k^2 \neq \mu_n^2$, то должно быть

$$\int_0^1 xy_k y_n dx = 0.$$

Заменяя в последнем интеграле y_k и y_n их выражениями через J_0, получаем

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)J_0(\mu_n x) dx = 0 \qquad (k \neq n).$$

Таким образом, функции $J_0(\mu_k x)$ образуют систему, ортогональную на $[0,1]$ с весом x.

Заметим, что можно доказать справедливость такого равенства [2]:

$$\int_0^1 xJ_0^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2}(J_0'(\mu_k))^2.$$

Все сказанное в этом разделе о функции $J_0(x)$ остается справедливым для любой функции $J_s(x)$. Именно, если $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ – последовательность положительных корней функции $J_s(x)$, то система функций

$$\{J_s(\mu_1 x),\ J_s(\mu_2 x),\ J_s(\mu_3 x), \ldots\}$$

ортогональна на промежутке $[0,1]$ с весом x, т.е.

$$\int_0^1 x J_s(\mu_k x) J_s(\mu_n x) dx = 0 \qquad (k \neq n).$$

Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и в случае $s = 0$. Нужно лишь использовать уравнение

$$x^2 y'' + x y' + (\mu^2 x^2 - s^2) y = 0.$$

Кроме того ([2]),

$$\int_0^1 x J_s^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} (J_s'(\mu_k))^2.$$

Так как функции $J_s(\mu_k x)$ образуют ортогональную систему на промежутке $[0,1]$, то с их помощью можно строить обобщенные ряды Фурье. Например, если достаточно гладкая функция задана на промежутке $[0,1]$, то ее можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_s(\mu_k x),$$

где, в соответствии с формулами разд. 4,

$$c_k = \frac{(f, J_s)}{||J_s||^2} = \frac{2 \int\limits_0^1 x f(x) J_s(\mu_k x) dx}{(J_s'(\mu_k))^2}.$$

Ряды такого типа называют рядами Фурье–Бесселя.

7. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Если функция $f(t)$ задана при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, то ее изображением по Фурье, или преобразованием Фурье, называют интеграл

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Функцию $f(t)$ называют оригиналом по Фурье по отношению к изображению.

Иногда для краткости будем использовать запись

$$F(i\omega)_* = {}^* f(t),$$

которая читается так: $F(i\omega)$ является изображением по Фурье функции $f(t)$.

Как показывается в общем курсе высшей математики, по изображению можно найти оригинал. Это делается с помощью формулы

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Так как $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$, то мы можем в изображении по Фурье отделить вещественную и мнимую части:

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$

Введем обозначения

$$P(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \quad Q(\omega) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt,$$

так что $F(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega)$.

Величины $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ называют соответственно вещественной и мнимой частотными (спектральными) характеристиками функции $f(t)$.

Очевидно, что $P(-\omega) = P(\omega)$ и $Q(-\omega) = -Q(\omega)$, т.е. $P(\omega)$ – четная, а $Q(\omega)$ – нечетная функции от ω.

С помощью $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ можно преобразовать интеграл Фурье. Действительно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(P(\omega) + iQ(\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t)d\omega.$$

В последнем интеграле раскроем скобки и отделим вещественную и мнимую части. Получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (P(\omega)\cos\omega t - Q(\omega)\sin\omega t) d\omega +$$

$$+ i\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (P(\omega)\sin\omega t + Q(\omega)\cos\omega t) d\omega$$

Под знаком первого интеграла стоит четная функция. Поэтому вместо него можно написать два интеграла по промежутку $[0, +\infty)$. Под знаком второго интеграла находится нечетная функция, а потому он равен нулю. В соответствии с этим мы можем записать интеграл Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} (P(\omega)\cos\omega t - Q(\omega)\sin\omega t) d\omega.$$

Мы получили вещественную форму записи интеграла Фурье.

Предположим теперь, что $f(t)$ – четная функция. Тогда из определений функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ следует, что

$$P(\omega) = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt, \quad Q(\omega) = 0.$$

Это означает, что изображение по Фурье оказывается вещественным и равным $P(\omega)$. В этом случаем величину $P(\omega)$ часто называют косинус-преобразованием по Фурье.

В соответствии с этим интеграл Фурье для четной функции имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} P(\omega)\cos\omega t d\omega.$$

Если $f(t)$ – нечетная функция, то аналогичным образом нетрудно найти, что

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -2\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$

Поэтому интеграл Фурье для нечетной функции будет таким:

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} Q(\omega)\sin\omega t d\omega.$$

Функция $Q(\omega)$ называется синус-преобразованием по Фурье.

Приведем примеры изображений по Фурье.

П р и м е р 1. Пусть $\alpha > 0$ и

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-\alpha t} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдем изображение этой функции. В соответствии с определением

$$F(i\omega) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}dt =$$

$$= -\frac{1}{\alpha+i\omega}\; e^{-(\alpha+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+i\omega} - \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{\alpha+i\omega}.$$

Так как $|e^{i\omega t}| = 1$, то $|e^{-(\alpha+i\omega)t}| = |e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{\alpha+i\omega} = 0.$$

Следовательно,

$$F(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega}.$$

П р и м е р 2. Найдем изображение по Фурье часто встречающейся в различных физических задачах функции $f(t) = e^{-c^2t^2}$ $(c > 0)$.

Прежде всего заметим, что наша функция четная, а потому ее изображение, как мы видели, имеет вид

$$F(i\omega) = P(\omega) = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-c^2t^2}\cos\omega t\; dt.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, найдем его производную по ω:

$$P'(\omega) = -2\int\limits_0^{\infty} e^{-c^2t^2}t\sin\omega t\; dt.$$

Так как $-2e^{-c^2t^2}tdt = \dfrac{1}{c^2}d(e^{-c^2t^2})$, то, интегрируя по частям, получим

$$P'(\omega) = \frac{1}{c^2}\int\limits_0^\infty \sin\omega t d(e^{-c^2t^2}) = \frac{1}{c^2}e^{-c^2t^2}\sin\omega t\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{c^2}\int\limits_0^\infty e^{-c^2t^2}\cos\omega t dt.$$

Очевидно, что внеинтегральное слагаемое равно нулю, а потому

$$P'(\omega) = -\frac{\omega}{c^2}\int\limits_0^\infty e^{-c^2t^2}\cos\omega t dt,$$

т.е. $P'(\omega) = -\dfrac{\omega}{2c^2}P(\omega)$, откуда $\dfrac{dP(\omega)}{P(\omega)} = -\dfrac{\omega}{2c^2}d\omega$. Интегрируя равенство, находим $\ln P(\omega) = -\dfrac{\omega^2}{4c^2}+\ln C$, где $C-$ константа. Отсюда $P(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4c^2}}$.

Чтобы найти C, положим $\omega = 0$. Тогда

$$P(0) = C = 2\int\limits_0^\infty e^{-c^2t^2}\ dt.$$

Стоящий в правой части интеграл рассматривается в основном курсе высшей математики. Он равен $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2c}$. Значит, $C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{c}$, и потому

$$\frac{\sqrt{\pi}}{c}\ e^{-\frac{\omega^2}{2c^2}}\ {}_* = {}^* e^{-c^2t^2}.$$

В заключение приведем нужные для решения задач математической физики свойства изображений.

1. Если $F(i\omega)_* = {}^*f(t)$, то

$$(i\omega)^k F(i\omega)_* = {}^* f^{(k)}(t).$$

2. Если $F(i\omega)_* = {}^*f(t)$ и $G(i\omega)_* = {}^*g(t)$, то

$$F(i\omega)G(i\omega)_* = {}^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Это утверждение называют теоремой о свертке, поскольку последний интеграл называют сверткой функций f и g.

Интеграл Фурье впервые был введен Фурье в его работе, посвященной теории теплопроводности. Возможность представления функции в виде интеграла Фурье означает, что любой непериодический процесс можно представить в виде наложения бесчисленного количества элементарных гармонических колебаний.

8. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Познакомимся с тем, как описываются малые колебания тел. Начнем с простейшего одномерного случая, т.е. вначале выясним, как можно описать колебания струны. Струной мы называем упругое тонкое протяженное (одномерное) тело, которое не оказывает сопротивления изгибу. Будем считать, что струна однородна, так что ее плотность (в расчете на единицу длины) во всех точках равна ρ. Мы рассмотрим поперечные колебания струны и предположении, что они настолько малы, что растяжением струны можно пренебречь.

Будем считать, что струна в положении равновесия находится на оси Ox, а при колебаниях ее точки движутся перпендикулярно Ox, т.е. параллельно оси Oy. Обозначим через $U(x,t)$ отклонение точки x колеблющейся струны в момент времени t. Выясним, каким условиям должна удовлетворять величина $U(x,t)$.

Пусть $\alpha(x,t)$ – угол наклона касательной к струне в точке с координатами $(x, U(x,t))$. Тогда должно быть $\operatorname{tg}\alpha(x,t) = U_x(x,t)$. Дифференциал дуги имеет вид $dl = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}\,dx.$ Предположение о том, что растяжением струны можно пренебречь, означает, что величина $\operatorname{tg}^2\alpha(x,t) = U_x^2(x,t)$ пренебрежимо мала по сравнению с единицей.

Теперь рассмотрим малую часть колеблющейся струны. Пусть, как показано на рис. 5, эта часть лежит над отрезком $[x, x+\Delta x]$.

На эту часть действуют силы:
1) направленная вдоль оси Oy активная сила $F(x,t)\Delta x$;
2) приложенная на концах отрезка и направленная по касательным сила натяжения струны T.

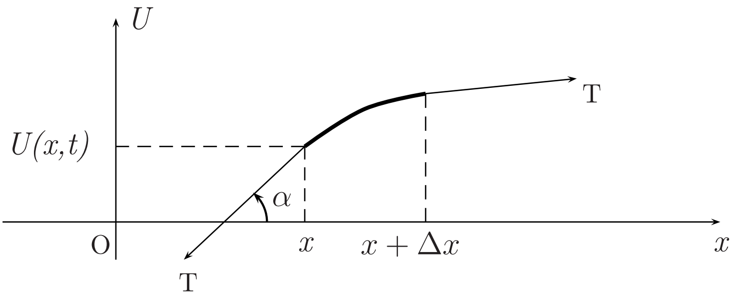

Рис. 5. Малая часть колеблющейся струны

Масса рассматриваемой части струны равна $\rho\Delta x$. Ускорение $U_{tt}(x,t)$ направлено вдоль оси OU. Поэтому, в силу закона Ньютона,

$$\rho dx U_{tt}(x,t) = F(x,t)\Delta x + T\sin\alpha(x+\Delta x,t) - T\sin\alpha(x,t).$$

Отсюда

$$\rho U_{tt}(x,t) = F(x,t) + T\frac{\sin\alpha(x+\Delta x,t) - \sin\alpha(x,t)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\rho U_{tt}(x,t) = F(x,t) + T\frac{\partial(\sin\alpha(x,t))}{\partial x}. \qquad (*)$$

Далее,

$$\frac{\partial(\sin\alpha(x,t))}{\partial x} = \cos\alpha(x,t)\ \frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}}\ \frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+U_x^2(x,t)}}\ \frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}.$$

Так как $\alpha(x,t) = \operatorname{arctg} U_x(x,t)$, то

$$\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{1+U_x^2(x,t)}\ U_{xx}(x,t).$$

Значит,

$$\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{(1+U_x^2(x,t)\sqrt{1+U_x^2(x,t)}}\ U_{xx}(x,t).$$

Поскольку величиной $U_x^2(x,t)$ можно пренебречь по сравнению с единицей, постольку можно считать, что

$$\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} = U_{xx}(x,t).$$

Это значит, что равенство ($*$) примет вид

$$\rho U_{tt}(x,t) = F(x,t) + TU_{xx}(x,t).$$

Положив $\dfrac{T}{\rho} = a^2$ и $\dfrac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t)$, нетрудно привести полученное уравнение к каноническому виду:

$$U_{tt}(x,t) - a^2U_{xx}(x,t) = f(x,t).$$

Нередко используют более краткую форму записи:

$$U_{tt} - a^2U_{xx} = f(x,t).$$

Выведенное нами уравнение малых поперечных колебаний струны иначе называют одномерным волновым уравнением или уравнением вынужденных колебаний струны.

Если $f(x,t) = 0$ при всех рассматриваемых значениях x и t, так что

$$U_{tt} - a^2U_{xx} = 0,$$

то уравнение называют однородным или уравнением свободных колебаний.

Для нахождения закона движения точек струны, т.е. функции $U(x,t)$, одного лишь уравнения колебаний недостаточно.

Прежде всего нужно знать начальное положение и начальную скорость каждой из точек струны. Если, например, движение началось в момент $t = 0$, то начальные условия имеют вид

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – известные функции.

Кроме того, необходимо знать, как ведут себя конечные точки струны в течение всего рассматриваемого времени. В случае, когда концы струны длиной l движутся по известному закону, краевые условия принимают вид

$$U(0,t) = \mu_1(t), \qquad U(l,t) = \mu_2(t),$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – известные функции. Они называются краевыми условиями первого рода.

В частности, если концы струны закреплены, то при всех t

$$U(0,t)=0, \qquad U(l,t)=0.$$

Можно задавать краевые условия иначе. Например,

$$U_x(0,t)=0, \qquad U_x(l,t)=0$$

или

$$U_x(0,t)=\nu_1(t) \qquad U_x(l,t)=\nu_2(t).$$

Эти условия называются краевыми условиями второго рода.

Заметим, что если рассматривается бесконечно длинная струна, то граничные условия не ставятся.

Так же, как и уравнение колебаний струны, выводятся уравнения малых колебаний мембран. Под мембраной понимают тонкое упругое тело, не оказывающее сопротивления изгибу. Мы приведем эти уравнения без вывода.

Пусть плоская мембрана в положении равновесия занимает на плоскости xOy область D, ограниченную контуром Г. Предположим, что точки мембраны испытывают малые поперечные колебания, т.е. перемещаются перпендикулярно плоскости пластины. Обозначим смещение точки (x,y) в момент t через $U(x,y,t)$. Тогда

$$U_{tt}-a^2(U_{xx}+U_{yy})=f(x,y,t) \qquad ((x,y)\in D,\ 0\leqslant t<\infty).$$

Это уравнение называют двумерным волновым уравнением.

Напомним, что выражение

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

называют оператором Лапласа.

Используя оператор Лапласа, можем записать волновое уравнение так:

$$U_{tt}-a^2\Delta U=f(x,y,t).$$

Начальные условия для этой задачи:

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y), \qquad U_t(x,y,0)=\psi(x,y) \quad ((x,y)\in D).$$

Если контур Γ мембраны неподвижен, то краевые условия имеют вид

$$U(x,y,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \Gamma.$$

При известном характере колебаний контура краевые условия будут такими:

$$U(x,y,t) = \mu(x,y,t) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \Gamma,$$

где $\mu(x,y,t)$ – заданная функция.

В трехмерном пространстве волновое уравнение имеет вид

$$U_{tt} - a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = f(x,y,z,t),$$

$$((x,y,z) \in T, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

где T – некоторое тело.

С помощью трехмерного оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

уравнение записывают в виде:

$$U_{tt} - a^2 \Delta U = f(x,y,z,t), \quad ((x,y,z) \in T, \quad 0 \leqslant t < \infty).$$

Начальные условия:

$$U(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \; U_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z) \;\; \text{при} \; (x,y,z) \in T.$$

Если поверхность S тела неподвижна, то краевые условия имеют вид

$$U(x,y,z,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y,z) \in S.$$

В пространстве волновое уравнение используют, например, для описания звуковых и электромагнитных волн.

9. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ СПОСОБОМ ДАЛАМБЕРА

Уравнение свободных колебаний описывается однородным уравнением. Значит, задача ставится так:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0)=\varphi(x), \quad U_t(x,0)=\psi(x).$$

Следуя Даламберу, сделаем в уравнении замену аргументов, положив

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Тогда, в силу правила дифференцирования сложной функции, получим

$$U_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t.$$

Так как $\xi_t = -a$ и $\eta_t = a$, то

$$U_t = -aU_\xi + U_\eta a = a(-U_\xi + U_\eta).$$

Теперь найдем U_{tt}:

$$U_{tt} = a(-U_{\xi\xi}\xi_t - U_{\xi\eta}\eta_t + U_{\eta\xi}\xi_t + U_{\eta\eta}\eta_t) = a^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}).$$

Аналогичным образом получаем

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

Подставим значения U_{tt} и U_{xx} в исходное уравнение:

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Отсюда видно, что

$$U = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\eta)$ могут быть любыми функциями, имеющими производные второго порядка. Таким образом, решение однородного уравнения колебаний струны имеет вид:

$$U(x,t) = F_1(x - at) + F_2(x + at).$$

Полученный нами вид решения означает, что колебания струны складываются из двух бегущих по струне в противоположных направлениях волн. При этом обе волны распространяются по струне со скоростью a. Действительно, положим $U_1(x,t) = F_1(x - at)$. Тогда в точке 0 в момент $t = 0$ будет $U_1(0,0) = F_1(0)$. Точно таким же окажется U_1 в точке x в момент $t = \dfrac{x}{a}$. Аналогично, слагаемое $U_2(x,t) = F_2(x + at)$ описывает, очевидно, волну бегущую с той же скоростью в противоположную сторону.

Теперь выясним, какими должны быть функции F_1 и F_2. В силу начальных условий

$$F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x),$$

$$-aF_1'(x) + aF_2'(x) = \psi(x).$$

Зафиксируем какое-нибудь значение x_0 и проинтегрируем второе равенство по промежутку $[x_0, x]$:

$$-F_1(x) + F_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C.$$

Теперь очевидно, что

$$F_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz - \frac{C}{2},$$

$$F_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz + \frac{C}{2}.$$

Отсюда

$$F_1(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(z)dz - \frac{C}{2},$$

$$F_2(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(z)dz + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$U(x,t) = F_1(x-at) + F_2(x+at) =$$

$$= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(z)dz$$

или, что то же,

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Решение задачи построено. Можно доказать, что других решений задача не имеет.

П р и м е р 1. Пусть

$$U_{tt} - 4U_{xx} = 0, \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ -\infty < x < \infty)$$

$$U(x,0) = h\frac{\sin x}{x}, \quad U_t(x,0) = 0.$$

В этом случае

$$U(x,t) = \frac{h}{2}\left(\frac{\sin(x-2t)}{x-2t} + \frac{\sin(x+2t)}{x+2t}\right).$$

П р и м е р 2. Дано

$$U_{tt} - 9U_{xx} = 0, \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ -\infty < x < \infty)$$

$$U(x,0) = h\frac{x}{1+x^2}, \quad U_t(x,0) = h\sin 2x.$$

В этом случае

$$U(x,t) = \frac{h}{2}\left(\frac{x-3t}{1+(x-3t)^2} + \frac{x+3t}{1+(x+3t)^2}\right) + \frac{h}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}\sin 2z dz$$

или

$$U(x,t) = \frac{h}{2}\left(\frac{x-3t}{1+(x-3t)^2} + \frac{x+3t}{1+(x+3t)^2}\right) + \frac{h}{6}\sin 2x \sin 6t.$$

10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ СПОСОБОМ ДАЛАМБЕРА

Требуется решить такую задачу

$$U_{tt} - a^2U_{xx} = f(x,t) \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ -\infty < x < \infty),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x).$$

Вначале решим однородное уравнение с теми же начальными условиями. Обозначим его решение через $\overline{U}(x,t)$.

Как мы видели,

$$\overline{U}(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Затем строим вспомогательную функцию, которая удовлетворяет однородному уравнению и для которой начальные условия заданы в некоторый момент времени $\tau \geqslant 0$. Назовем эту функцию $V(x,t;\tau)$. В соответствии со сказанным

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0 \qquad (\tau \leqslant t < \infty, \ \ -\infty < x < \infty).$$

Начальные условия для $V(x,t;\tau)$ поставим такие:

$$V(x,\tau;\tau) = 0, \qquad V_t(x,\tau;\tau) = f(x,\tau).$$

Для нахождения $V(x,t;\tau)$ используем формулу решения, полученную в предыдущем разделе. При этом учтем, что начальные условия заданы в момент τ , а не в момент 0 . Получим

$$V(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz.$$

Найдя $V(x,t;\tau)$, строим функцию

$$U^*(x,t) = \int\limits_0^t V(x,t;\tau)d\tau.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по t , получаем

$$U_t^*(x,t) = V(x,t;t) + \int\limits_0^t V_t(x,t;\tau)d\tau.$$

В силу первого начального условия, должно быть $V(x,t;t) = 0$. Поэтому

$$U_t^*(x,t) = \int\limits_0^t V_t(x,t;\tau)d\tau.$$

Дифференцируя еще раз по t, находим

$$U_{tt}^*(x,t) = V_t(x,t;t) + \int\limits_0^t V_{tt}(x,t;\tau)d\tau.$$

Из начальных условий $V_t(x,t;t) = f(x,t)$. Поэтому

$$U_{tt}^*(x,t) = f(x,t) + \int\limits_0^t V_{tt}(x,t;\tau)d\tau.$$

Кроме того, ясно, что

$$U_{xx}^*(x,t) = \int\limits_0^t V_{xx}(x,t;\tau)d\tau.$$

Умножая последнее равенство на a^2 и вычитая его из предпоследнего, получаем

$$U_{tt}^*(x,t) - a^2U_{xx}^*(x,t) = \int\limits_0^t (V_{xx}(x,t;\tau) - a^2V_{xx}(x,t;\tau))d\tau + f(x,t).$$

Подынтегральное выражение, очевидно, равно нулю. Значит,

$$U_{xx}^*(x,t) - a^2U_{xx}^*(x,t) = f(x,t).$$

Кроме того, понятно, что

$$U^*(x,0) = 0, \quad U_t^*(x,0) = 0.$$

Если мы теперь построим сумму

$$U(x,t) = \overline{U}(x,t) + U^*(x,t),$$

то она будет решением исходной задачи. Так как

$$U^*(x,t)=\int\limits_0^t V(x,t;\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz,$$

то решение можем записать так:

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz.$$

П р и м е р. Пусть

$$U_{tt}-a^2U_{xx}=h\sin x,\qquad (0\leqslant t<\infty,\quad -\infty<x<\infty)$$

$$U(x,0)=h\cos x,\qquad U_t(x,0)=0.$$

Подставив эти данные в полученную формулу, найдем

$$U(x,t)=$$

$$=h\frac{\cos(x-at)+\cos(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} h\sin z dz=$$

$$=h\cos x\cos at+\frac{h}{2a}\int\limits_0^t(\cos(x-a(t-\tau))-\cos(x+a(t-\tau)))d\tau.$$

Проведя интегрирование и несложные преобразования, получим окончательный ответ:

$$U(x,t)=h\cos x\cos at+\frac{h}{a^2}(1-\cos at)\sin x.$$

11. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ СПОСОБОМ ДАЛАМБЕРА

Будем считать, что в положении равновесия струна занимает половину оси, так что $0\leqslant x<+\infty$. Начнем с рассмотрения случая, когда уравнение однородное и конец струны ($x = 0$) неподвижен, т.е. рассмотрим такую задачу:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ 0 \leqslant x < \infty),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$

$$U(0,t) = 0.$$

Заметим, что начальные и краевое условия должны быть согласованы. Это означает, что должно быть $\varphi(0) = 0$ и $\psi(0) = 0$.

Сделав такую же замену аргументов, как и в случае бесконечной струны, получим такой же результат:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

В нашем случае функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы лишь при $x \geqslant 0$, а величина $x - at$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Чтобы можно было использовать написанное решение при любых значениях аргументов, продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на отрицательные значения аргумента. Обозначим продолженные функции соответственно $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$. Тогда можем записать решение нашей задачи:

$$U(x,t) = \frac{\varphi_n(x-at) + \varphi_n(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_n(z) dz.$$

Нетрудно проверить, что для построенного решения выполнены и начальные и краевое условия. Действительно, при $x = 0$

$$U(0,t) = \frac{\varphi_n(-at) + \varphi_n(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{+at} \psi_n(z) dz.$$

Так как φ_n – нечетная функция, то $\varphi_n(-at) + \varphi_n(at) = 0$. В силу нечетности ψ_n интеграл от нее по симметричному промежутку $[-at, at]$ равен нулю. Значит, $U(0,t) = 0$, т.е. краевое условие выполнено.

При $t = 0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$, очевидно, $U(x,0) = \varphi(x)$. Нетрудно проверить, что и второе начальное условие выполнено.

П р и м е р 1. Пусть

$$U_{tt} - 4U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ 0 \leqslant x < \infty),$$

$$U(x,0) = h\frac{x}{1+x^2}, \qquad U_t(x,0) = 0,$$

$$U(0,t) = 0.$$

В этом случае, очевидно, $\varphi_n(x) = h\dfrac{x}{1+x^2}$ и $\psi_n(x) = 0$. Поэтому решением будет

$$U(x,t) = \frac{h}{2}\left(\frac{x-2t}{1+(x-2t)^2} + \frac{x+2t}{1+(x+2t)^2}\right).$$

П р и м е р 2. Дано

$$U_{tt} - 16U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ 0 \leqslant x < \infty),$$

$$U(x,0) = \sin^2 x, \qquad U_t(x,0) = \sin x,$$

$$U(0,t) = 0.$$

Ясно, что

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -\sin^2 x, & x \leqslant 0, \\ \ \ \sin^2 x, & x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \psi_n(x) = \sin x.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz = \frac{1}{8}\int\limits_{x-4t}^{x+4t} \sin z dz = \frac{1}{4}\sin x \sin 4t.$$

Следовательно, если $x - 4t \leqslant 0$, то

$$U(x,t) = \frac{-\sin^2(x-4t) + \sin^2(x+4t)}{2} + \frac{1}{4}\sin x \sin 4t.$$

Если же $x - 4t \geqslant 0$, то

$$U(x,t) = \frac{\sin^2(x-4t) + \sin^2(x+4t)}{2} + \frac{1}{4}\sin x \sin 4t.$$

Теперь перейдем к случаю, когда конец струны движется по известному закону. Это приводит к такой задаче:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ 0 \leqslant x < \infty),$$
$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$
$$U(0,t) = \mu(t).$$

Заметим сразу же, что граничное условие должно быть согласовано с начальным. Это означает, что $\varphi(0) = \mu(0)$ и $\psi(0) = \mu'(0)$.

Сначала построим функцию

$$\overline{U}(x,t) = \frac{\varphi_n(x-at) + \varphi_n(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_n(z)dz,$$

которая удовлетворяет уравнению и начальным условиям. Однако для нее не выполняется ненулевое краевое условие. Поэтому построим функцию $U^*(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению, нулевым начальным условиям и поставленному краевому условию. Тогда $U(x,t) = \overline{U}(x,t) + U^*(x,t)$ будет решением поставленной задачи.

Естественно, что колебание конца струны вызывает бегущую от него вдоль струны волну. Поэтому будем искать $U^*(x,t)$ в виде волны, распространяющейся со скоростью a. При этом, если волна еще не достигла точки x, т.е $at < x$, то $U^*(x,t) = 0$. Если же $at \geqslant x$, то отклонение $U^*(x,t) = g(x-at)$. Чтобы найти функцию g, используем краевое условие, в силу которого при $x = 0$ должно быть $g(-at) = \mu(t)$. Отсюда очевидно следует, что $g(-t) = \mu\left(\dfrac{t}{a}\right)$ и потому $g(x-at) = \mu\left(\dfrac{at-x}{a}\right)$. Итак,

$$U^*(x,t) = \begin{cases} 0, & x - at \geqslant 0, \\ \mu\left(\dfrac{at-x}{a}\right), & x - at \leqslant 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что построенная $U^*(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению. Действительно, мы уже видели, что однородному уравнению удовлетворяет всякая функция от аргумента $at - x$. Значит, в частности, этому уравнению удовлетворяет

$\mu\left(\dfrac{at-x}{a}\right)$. Кроме того, так как функция $\mu(t)$ согласована с начальными условиями, то $U^*(x,0)=U_t^*(x,0)=0$.

Итак, если $x-at\geqslant 0$, то

$$U(x,t)=\frac{\varphi_n(x-at)+\varphi_n(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_n(z)dz;$$

если же $x-at\leqslant 0$, то

$$U(x,t)=\frac{\varphi_n(x-at)+\varphi_n(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_n(z)dz+\mu\left(\frac{at-x}{a}\right).$$

П р и м е р 3.

$$U_{tt}-4U_{xx}=0 \qquad (0\leqslant x<\infty,\ \ 0\leqslant t<\infty),$$

$$U(x,0)=h\frac{x}{1+x^2}, \qquad U_t(x,0)=0,$$

$$U(0,t)=\sin^2 t.$$

Из решения примера 1 этого раздела видно, что в нашем случае

$$\overline{U}(x,t)=\frac{h}{2}\left(\frac{x-2t}{1+(x-2t)^2}+\frac{x+2t}{1+(x+2t)^2}\right).$$

Так как в нашем примере $\mu(t)=\sin^2 t$, то

$$U^*(t,x)=\sin^2\frac{2t-x}{2}.$$

Следовательно, при $x-2t\geqslant 0$

$$U(x,t)=\frac{h}{2}\left(\frac{x-2t}{1+(x-2t)^2}+\frac{x+2t}{1+(x+2t)^2}\right)$$

и при $x-2t\leqslant 0$

$$U(x,t)=\frac{h}{2}\left(\frac{x-2t}{1+(x-2t)^2}+\frac{x+2t}{1+(x+2t)^2}\right)+\sin^2\frac{2t-x}{2}.$$

Если колебания полуограниченной струны вынужденные, т.е. уравнение имеет вид

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t),$$

то продолжив функцию $f(x,t)$ нечетным образом на все отрицательные значения x, сведем, как и раньше, нашу задачу к задаче о колебании бесконечной струны.

Мы рассматривали все варианты задачи при краевых условиях первого типа, когда при $x = 0$ задано значение функции U. Если задать в точке $x = 0$ производную U_x, т.е. задать краевые условия второго типа, то решение будет отличаться от построенного раньше лишь тем, что входящие в него функции нужно продолжить на отрицательные значения x четным образом.

Пусть, например, рассматриваются свободные колебания полуограниченной струны с нулевым краевым условием второго рода, т.е.

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$

$$U_x(0,t) = 0.$$

Тогда

$$U(x,t) = \frac{\varphi_c(x-at) + \varphi_c(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_c(z)dz,$$

где через φ_c и ψ_c обозначены четные продолжения функций φ и ψ.

П р и м е р 4.

$$U_{tt} - 9U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U_t(x,0) = 3\sin x,$$

$$U_x(0,t) = 0.$$

Очевидно, что

$$\varphi_c(x) = 0, \quad \psi_c(x) = \begin{cases} -3\sin x, & x \leqslant 0, \\ 3\sin x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому при $x - 3t \leqslant 0$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-3t}^{0}(-\sin z)dz + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+3t}\sin z dz,$$

а при $x - 3t \geqslant 0$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}\sin z dz,$$

Найдя эти несложные интегралы, получим

$$U(x,t) = \begin{cases} 1 - \cos x \cos 3t, & x - 3t \leqslant 0, \\ \sin x \sin 3t, & x - 3t \geqslant 0. \end{cases}$$

12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ СПОСОБОМ ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим сначала случай однородного уравнения для струны с неподвижными концами. Будем считать, что в положении равновесия струна занимает отрезок $[0, l]$ оси Ox. Значит, задача о ее колебаниях ставится так:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty, \ \ 0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$

$$U(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = 0.$$

Прежде чем строить решение этой задачи, заметим, что начальные и граничные условия должны быть согласованы, так что должно быть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Применив к этой задаче способ решения Даламбера, получим, как и выше, решение:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Здесь величины $x \pm at$ могут принимать любые вещественные значения, но зависящие от них функции φ и ψ заданы лишь при значениях аргумента из промежутка $[0, l]$. Значит, эти функции следует продолжить на всю ось.

При решении задачи о полубесконечной струне мы видели, что условие $U(0, t) = 0$, т.е. закрепленность конца $x = 0$, требует нечетного продолжения функций φ и ψ. Поскольку в нашей задаче краевое условие такое же, постольку в ней нужно продлить эти функции нечетным образом, т.е. для продленных функций

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x).$$

Конец $x = l$ струны тоже закреплен, т.е. $U(l, t) = 0$, поэтому обе функции должны быть нечетными относительно точки $x = l$. Другими словами, продолженные функции должны удовлетворять условиям

$$\varphi(l - x) = -\varphi(l + x), \quad \psi(l - x) = -\psi(l + x).$$

Итак, для продолженной функции φ выполняются два равенства:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \varphi(l - x) = -\varphi(l + x).$$

Полагая во втором из них $l - x = z$, получаем

$$\varphi(z) = -\varphi(2l - z).$$

В силу первого из равенств

$$-\varphi(2l - z) = \varphi(z - 2l).$$

Следовательно,

$$\varphi(z) = \varphi(z - 2l).$$

Это равенство означает, что продолженная функция $\varphi(x)$ должна быть периодической с периодом $T = 2l$.

Аналогично показывается, что продолженная функция $\psi(x)$ тоже должна иметь период $T = 2l$.

Значит, чтобы пользоваться построенным решением при любых значениях аргументов $x \pm at$, необходимо продолжить функции φ и ψ нечетным образом на промежуток $[-l, 0]$ и затем с периодом

$T = 2l$ – на всю вещественную ось. Обозначив продолженные таким образом функции соответственно φ_{np} и ψ_{np}, можно записать решение задачи:

$$U(x,t) = \frac{\varphi_{np}(x+at) + \varphi_{np}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_{np}(z)\,dz.$$

Если уравнение неоднородное и концы струны закреплены, т.е.

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t) \qquad (0 \leqslant t < \infty, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$
$$U(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = 0,$$

то, продолжив функцию $f(x,t)$ нечетным образом с периодом $2l$ на все значения x, мы сведем нашу задачу к задаче о колебаниях бесконечно длинной струны, решенной в разделе 10, и решение будет иметь вид

$$U(x,t) = \frac{\varphi_{np}(x-at) + \varphi_{np}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_{np}(z)dz +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_{np}(z,\tau)dz.$$

Если уравнение неоднородное и концы струны движутся по заданному закону, т.е. задача ставится так

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t) \qquad (0 \leqslant t < \infty, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$
$$U(0,t) = \mu_1(t), \qquad U(l,t) = \mu_2(t),$$

то эту задачу можно свести к предыдущей. Действительно, положим

$$U(x,t) = V(x,t) + \frac{x}{l}\mu_2(t) + \frac{l-x}{l}\mu_1(t).$$

Тогда, как легко видеть, окажется, что

$$V(0,t) = V(l,t) = 0,$$

$$V(x,0) = \varphi(x) - \frac{x}{l}\mu_2(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1(0),$$

$$V_t(x,0) = \psi(x) - \frac{x}{l}\mu_2'(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1'(0).$$

Далее,

$$V_{tt}(x,t) = U_{tt}(x,t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t) - \frac{l-x}{l}\mu_1''(t),$$

$$V_{xx}(x,t) = U_{xx}(x,t).$$

Значит, для $V(x,t)$ задача окажется такой:

$$V_{tt} - a^2V_{xx} = f(x,t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t) - \frac{l-x}{l}\mu_1''(t),$$

$$V(x,0) = \varphi(x) - \frac{x}{l}\mu_2(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1(0),$$

$$V_t(x,0) = \psi(x) - \frac{x}{l}\mu_2'(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1'(0),$$

$$V(0,t) = V(l,t) = 0.$$

Тем самым мы свели задачу к предыдущей.

Если на концах заданы граничные условия 2-го рода, то для решения задачи следует продолжить функции φ и ψ четным образом с периодом $2l$.

13. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ СПОСОБОМ ФУРЬЕ

Мы должны найти решение уравнения

$$U_{tt} - a^2U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$

и условиям краевым:

$$U(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = 0.$$

Следуя Фурье, будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций, зависящих по отдельности от x и t, т.е. положим $U(x,t) = X(x)T(t)$. В таком случае $U_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$ и $U_{xx}(x,t) = X(x)T''(t)$. Подставляя эти выражения в уравнение, получаем

$$X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) = 0,$$

откуда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)}.$$

Правая часть последнего равенства зависит только от t, а левая – только от x. Такое равенство возможно лишь тогда, когда обе части постоянны. Эта постоянная может быть или положительной, или отрицательной, или нулем. Рассмотрим все три случая.

Пусть эта постоянная равна нулю. Тогда $X''(x) = 0$. Интегрируя, нетрудно получить, что $X(x) = C_1x + C_2$. Значит,

$$U(x,t) = (C_1x + C_2)T(t).$$

. Подставив в это решение краевые условия, получим пару уравнений:

$$C_2T(t) = 0, \qquad (C_1l + C_2)T(t) = 0,$$

или

$$C_2 = 0, \qquad C_1l + C_2 = 0,$$

поскольку $T(t) \neq 0$ тождественно. Из последних уравнений видно, что $C_1 = C_2 = 0$, а потому $U(x,t) = 0$ при всех x и t. Ясно, что такое решение описывать колебания не может.

Теперь предположим, что постоянная положительна. Обозначим ее через λ^2, так что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \lambda^2.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$X''(x) - \lambda^2X(x) = 0.$$

Решая это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, находим

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Значит,

$$U(x,t) = (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) T(t).$$

Подстановка этого решения в краевые условия приводит к системе уравнений:

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0,$$

которая имеет единственное решение: $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, опять $U(x,t) = 0$.

Наконец, будем считать, что постоянная отрицательна. Обозначив ее через $-\lambda^2$, получим уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Поэтому краевые условия приводят к системе

$$C_1 = 0. \qquad C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Чтобы получить ненулевое решение этой системы, нужно положить $\sin \lambda l = 0$. Из этого уравнения видно, что $\lambda l = k\pi$, где k – любое целое число. Заметим сразу же, что в качестве k достаточно брать лишь положительные целые числа, так как при отрицательных k получаются такие же решения, как и при положительных. Таким образом, существует бесконечно много значений λ, при которых ненулевые решения удовлетворяют краевым условиям:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Эти решения имеют вид

$$X_k(x) = C_{2k} \sin \frac{k\pi x}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Обратимся теперь к уравнению для $T(t)$. При найденных нами значениях $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ получаем

$$T''(t) + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$T_k(t) = D_{1k}\cos\frac{ak\pi t}{l} + D_{2k}\sin\frac{ak\pi t}{l}.$$

Таким образом, мы получили бесконечно много решений уравнения колебаний струны, удовлетворяющих нулевым краевым условиям:

$$U_k(x,t) = C_{2k}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(D_{1k}\cos\frac{ak\pi t}{l} + D_{2k}\sin\frac{ak\pi t}{l}\right)$$

$$(k = 1, 2, 3, ...).$$

Для упрощения записи положим $A_k = C_{2k}D_{1k}$ и $B_k = C_{2k}D_{2k}$. Получим

$$U_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\right)$$

$$(k = 1, 2, 3, ...).$$

Ясно, что ни одно из найденных нами решений не удовлетворяет, вообще говоря, начальным условиям. Вместе с тем, в силу однородности решаемого уравнения, сумма его решений тоже будет решением. Значит, мы можем построить такое решение:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\right).$$

Положив $t = 0$ и использовав первое из начальных условий, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Это равенство представляет собой разложение в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x)$. Вспомнив формулу для коэффициентов Фурье, получим

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Продифференцировав $U(x,t)$ по t, находим

$$U_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(-A_k\sin\frac{ak\pi t}{l} + B_k\cos\frac{ak\pi t}{l}\right)\frac{ak\pi}{l}.$$

Положив здесь $t=0$, получим, в силу второго начального условия,

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{ak\pi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$$

Значит, величины $B_k\dfrac{ak\pi}{l}$ являются коэффициентами Фурье в разложении функции $\psi(x)$ в ряд по синусам, так что

$$B_k\frac{ak\pi}{l} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Отсюда

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Таким образом, мы построили решение однородного уравнения колебаний струны, удовлетворяющее начальным и нулевым краевым условиям:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\right),$$

где

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Это решение оказалось суммой слагаемых, каждое из которых нетрудно привести к виду

$$M_k \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\left(\frac{ak\pi t}{l}+\alpha_k\right).$$

Видно, что это слагаемое описывает гармоническое колебание точки x струны с амплитудой $M_k\left|\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right|$ и частотой $\dfrac{ak\pi}{l}$. При этом в каждый момент времени фаза колебаний для всех точек одна и та же. Колебание такого типа называют стоячей волной.

Итак, колебание струны представляет собой наложение стоячих волн.

Напомним, что эту задачу мы уже решали в предыдущем разделе. Там пришлось для построения решения продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на промежуток $[-l,0]$, а затем распространить продолженные функции на всю ось с периодом $T=2l$. Здесь же мы разложили эти функции в ряд по синусам, т.е. сделали то же самое.

П р и м е р 1. Предположим, что в момент $t=0$ середина струны оттянута (рис. 6) на высоту h и отпущена, причем начальные скорости всех точек струны равны нулю. Концы струны закреплены.

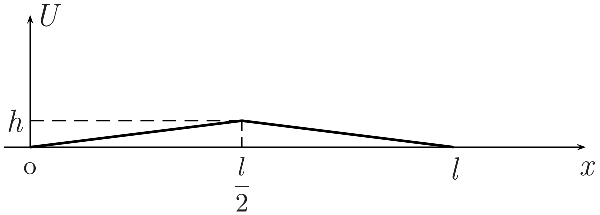

Рис. 6. Начальная форма струны

В этом случае, как нетрудно понять, начальные условия имеют вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l;\end{cases}\qquad \psi(x)=0.$$

Поэтому

$$A_k = \frac{4h}{l^2}\left(\int\limits_0^{l/2} x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$A_k = \frac{8h}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

При четных значениях k, т.е. при $k = 2n$,

$$A_{2n} = \frac{2h}{\pi^2 n^2}\sin n\pi = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Если же – нечетное, т.е. $k = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, то

$$A_{2n+1} = \frac{8h}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} =$$

$$= \frac{8h}{\pi^2(2n+1)^2}\cos n\pi = \frac{8(-1)^n h}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

Так как $\psi(x) = 0$, то $B_k = 0$.

Теперь можем написать выражение для решения:

$$U(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad (0 \leqslant t \leqslant +\infty),$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U_t(x,0) = \begin{cases} v_0, & x \in \left[\dfrac{l}{2} - \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{l}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right], \\[2ex] 0, & x \overline{\in} \left[\dfrac{l}{2} - \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{l}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right], \end{cases}$$

$$U(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = 0.$$

Такая постановка задачи означает, что в начальный момент по отрезку $\left[\dfrac{l}{2} - \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{l}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right]$ покоящейся струны ударяет молоточек, придавая точкам этого отрезка начальную скорость v_0.

В этом случае $A_k = 0$, а B_k находятся так:

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int\limits_{(l-\alpha)/2}^{(l+\alpha)/2} v_0 \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{2l}{a\pi^2 k^2} v_0 \cos \frac{k\pi x}{l} \Bigg|_{(l-\alpha)/2}^{(l+\alpha)/2} =$$

$$= \frac{2l}{a\pi^2 k^2} v_0 \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi\alpha}{2l}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi\alpha}{2l}\right)\right) =$$

$$= \frac{4l}{a\pi^2 k^2} v_0 \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi\alpha}{2l}.$$

Видно, что при $k = 2n$ будет $B_{2n} = 0$. Если же $k = 2n+1$, (n=0,1,2,...), то окажется $B_{2n+1} = \dfrac{4(-1)^n l}{a\pi^2(2n+1)^2} v_0 \sin \dfrac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}$. Следовательно, решение нашей задачи таково:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \sin\frac{a(2n+1)\pi t}{l},$$

где

$$B_{2n+1} = \frac{4(-1)^n l}{a\pi^2(2n+1)^2} v_0 \sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}.$$

П р и м е р 3.

$$U_{tt} - 4U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \frac{1}{12}\sin\frac{5\pi x}{2}, \qquad U_t(x,0) = \frac{1}{8}\sin\frac{7\pi x}{2},$$

$$U(0,t) = U(2,t) = 0.$$

Так как $l = 2$, начальные данные следует раскладывать в ряд по функциям $\sin\dfrac{k\pi x}{2}$. Поскольку $\varphi(x) = \dfrac{1}{12}\sin\dfrac{5\pi x}{2}$, постольку понятно, что в ее ряде Фурье останется отличным от нуля только пятый коэффициент, так что окажется $A_5 = \dfrac{1}{12}$. Аналогичным образом в ряде для $\psi(x)$ останется не равным нулю лишь седьмой коэффициент, равный $\dfrac{1}{8}$. Поэтому в решении из всех B_k останется только $B_7 = \dfrac{1}{8\pi}$. Следовательно, используя общее выражение для решения, получим

$$U(x,t) = \frac{1}{12}\sin\frac{5\pi x}{2}\cos 5\pi t + \frac{1}{56\pi}\sin\frac{7\pi x}{2}\sin 7\pi t.$$

14. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ СПОСОБОМ ФУРЬЕ

В этом разделе мы выясним, как находится решение неоднородного уравнения

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

при условиях

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x),$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0.$$

Применим еще раз способ Фурье. Для этого разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье по функциям $\sin\dfrac{k\pi x}{l}$. Естественно, что коэффициенты этого ряда будут зависеть от t. Получим

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Теперь запишем уравнение в виде

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

и будем искать решение в форме

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставив этот ряд в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)\sin\frac{k\pi x}{l} + a^2\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\frac{k^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Сравнивая ряды, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, легко понять, что

$$T_k''(t) + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} T_k(t) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Значит, функции $T_k(t)$ должны быть решениями неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Так как

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

то

$$U_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Отсюда, в соответствии с начальными условиями, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$$

Эти равенства означают, что величины $T_k(0)$ и $T_k'(0)$ должны быть коэффициентами Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при разложении этих функций в ряд по синусам. Обозначив эти коэффициенты соответственно через φ_k и ψ_k , можем написать, что должны выполняться условия

$$T_k(0) = \varphi_k, \qquad T'(0) = \psi_k.$$

Итак, функции $T_k(t)$ должны быть решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$T_k''(t) + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} T_k(t) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, 3, ...),$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$T_k(0) = \varphi_k, \quad T'(0) = \psi_k.$$

Решив уравнения, т.е. найдя $T_k(t)$, можем построить $U(x,t)$.

Если правая часть уравнения имеет вид $f(x)$, т.е. не зависит от t, то коэффициенты Фурье f_k функции $f(x)$ будут постоянными. В этом случае дифференциальное уравнение для $T_k(t)$ становится весьма простым:

$$T_k''(t) + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T_k(t) = f_k \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Общее решение этого уравнения:

$$T_k(t) = C_1 \cos\frac{ak\pi t}{l} + C_2 \sin\frac{ak\pi t}{l} + \frac{f_k l^2}{a^2k^2\pi^2}.$$

Используя начальные условия $T_k(0) = \varphi_k, \ T_k'(0) = \psi_k$ находим, что

$$T_k(t) = \left(\varphi_k - \frac{f_k l^2}{a^2k^2\pi^2}\right)\cos\frac{ak\pi t}{l} + \frac{\psi_k l}{k\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l} + \frac{f_k l^2}{a^2k^2\pi^2}.$$

Следовательно,

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\varphi_k - \frac{f_k l^2}{a^2k^2\pi^2}\right)\cos\frac{ak\pi t}{l} + \right.$$

$$\left. + (v + \frac{\psi_k l}{k\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l} + \frac{f_k l^2}{a^2k^2\pi^2}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

П р и м е р . Решим такую задачу:

$$U_{tt} - 4U_{xx} = \sin\pi x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \sin 2\pi x, \quad U_t(x,0) = \sin 3\pi x,$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0.$$

В нашем случае $l = 1$. Это означает, что $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нужно раскладывать в ряд по функциям $\sin k\pi x$. Так как $f(x) = \sin\pi x$, то все коэффициенты Фурье f_k, за исключением f_1, будут равны нулю, а $f_1 = 1$. Аналогичным образом, разложения функций

$\varphi(x) = \sin 2\pi x$ и $\psi(x) = \sin 3\pi x$ в ряд по синусам будут содержать лишь по одному, не равному нулю коэффициенту. Действительно, легко убедиться, что $\varphi_2 = 1$, $\varphi_k = 0$ при $k \neq 2$, $\psi_3 = 1$, $\psi_k = 0$ при $k \neq 3$.

В соответствии с полученной формулой для $T_k(t)$ и учитывая, что $a = 2$, находим

$$T_1(t) = \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos 2\pi t), \qquad T_2(t) = \cos 4\pi t,$$

$$T_3(t) = \frac{1}{6\pi}\sin 6\pi t, \qquad T_k(t) = 0 \quad (k > 3).$$

Следовательно,

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos 2\pi t)\sin \pi x + \cos 4\pi t \sin 2\pi x + \frac{1}{6\pi}\sin 6\pi t \sin 3\pi x.$$

15. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ СПОСОБОМ ФУРЬЕ

Пусть краевые условия задачи о колебании струны ненулевые, т.е. требуется найти решение уравнения

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = f(x,t) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

при условиях

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad U_t(x,0) = \psi(x),$$

$$U(0,t) = \mu_1(t), \qquad U(l,t) = \mu_2(t).$$

Сделаем замену, положив

$$V(x,t) = U(x,t) - \frac{x}{l}\mu_2(t) - \frac{l-x}{l}\mu_1(t).$$

Тогда окажется, что

$$V(0,t) = V(l,t) = 0,$$

$$V(x,0) = \varphi(x) - \frac{x}{l}\mu_2(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1(0),$$

$$V_t(x,0) = \psi(x) - \frac{x}{l}\mu_2'(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1'(0).$$

Далее,

$$V_{tt}(x,t) = U_{tt}(x,t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t) - \frac{l-x}{l}\mu_1''(t), \quad V_{xx}(x,t) = U_{xx}(x,t).$$

Значит, задача для $V(x,t)$ окажется задачей с нулевыми краевыми условиями. Действительно,

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = f(x,t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t) - \frac{l-x}{l}\mu_1''(t),$$

$$V(x,0) = \varphi(x) - \frac{x}{l}\mu_2(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1(0),$$

$$V_t(x,0) = \psi(x) - \frac{x}{l}\mu_2'(0) - \frac{l-x}{l}\mu_1'(0),$$

$$V(0,t) = V(l,t) = 0.$$

П р и м е р. Пусть

$$U_{tt} - U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U_t(x,0) = h,$$

$$U(0,t) = U(l,t) = \frac{h}{\pi}\sin \pi t.$$

В соответствии со сказанным ранее полагаем

$$V(x,t) = U(x,t) - x\frac{h}{\pi}\sin \pi t - (1-x)\frac{h}{\pi}\sin \pi t = U(x,t) - \frac{h}{\pi}\sin \pi t.$$

Тогда

$$V(x,0) = U(x,0) = 0, V_t(x,0) = U_t(x,0) - h = 0,$$

$$V(0,t) = V(1,t) = 0.$$

Кроме того,

$$V_{tt} = U_{tt} + h\pi \sin \pi t, \qquad V_{xx} = U_{xx}.$$

Значит, $V(x,t)$ должно быть решением уравнения

$$V_{tt} - V_{xx} = h\pi \sin \pi t \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

удовлетворяющим условиям

$$V(x,0) = 0, \quad V_t(x,0) = 0,$$

$$V(0,t) = V(1,t) = 0.$$

Чтобы найти решение, разложим правую часть уравнения в ряд Фурье по $\sin k\pi x$ на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Так как в правую часть уравнения явным образом не входит x, то мы разложим в ряд функцию $f(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$, а затем умножим обе части полученного равенства на $h\pi \sin \pi t$.

Находим коэффициенты:

$$b_k = 2\int\limits_0^1 \sin k\pi x dx = \frac{2}{k\pi}(1 - \cos kx) = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Очевидно, что $b_{2n} = 0$ и $b_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$. Поэтому

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi x \quad (0 < x < 1),$$

откуда

$$h\pi \sin \pi t = h \sin \pi t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)} \sin(2n+1)\pi x \quad (0 < x < 1).$$

Теперь записываем уравнение в виде

$$V_{tt} - V_{xx} = 4h \sin \pi t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin(2n+1)\pi x.$$

Ищем его решение в форме

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin(2n+1)\pi x.$$

Подставив это выражение для $V(x,t)$ в левую часть уравнения и затем сравнив коэффициенты при $\sin(2n+1)x$ в обеих частях, увидим, что $T_n(t)$ должны быть решениями дифференциальных уравнений

$$T_n''(t) + (2n+1)^2\pi^2 T_n(t) = \frac{4h}{2n+1}\sin\pi t \quad (n = 0, 1.2, ...).$$

При этом, в силу начальных условий для $V(x,t)$,

$$T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0.$$

Если $n = 0$, то оказывается

$$T_0'' + \pi^2 T_0 = 4h\sin\pi t.$$

Общим решением этого уравнения является

$$T_0(t) = C_1\cos\pi t + C_2\sin\pi t - \frac{2h}{\pi}t\cos\pi t.$$

Из начальных условий находим $C_1 = 0, \quad C_2 = \dfrac{2h}{\pi^2}$.

Следовательно,

$$T_0(t) = \frac{2h}{\pi^2}\sin\pi t - \frac{2h}{\pi}t\cos\pi t.$$

Если $n = 1, 2, 3, ...$, то общее решение будет таким:

$$T_n(t) = C_{1n}\cos(2n+1)\pi t + C_{2n}\sin(2n+1)\pi t +$$

$$+\frac{h}{n(n+1)(2n+1)\pi^2}\sin\pi t.$$

В силу начальных условий

$$C_{1n} = 0, \quad C_{2n} = -\frac{h}{n(n+1)(2n+1)^2\pi^2},$$

откуда

$$T_n(t) = A_n\left(-\frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1} + \sin\pi t\right) \quad (n = 1, 2, 3, ...),$$

где

$$A_n = \frac{h}{n(n+1)(2n+1)\pi^2}.$$

Значит,

$$V(x,t) = \left(-\frac{2h}{\pi^2}\sin\pi t + \frac{2h}{\pi}t\cos\pi t\right)\sin\pi x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(-\frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1} + \sin\pi t\right)\sin(2n+1)x.$$

Зная $V(x,t)$, находим

$$U(x,t) = \frac{h}{\pi}\sin\pi t + \left(-\frac{2h}{\pi^2}\sin\pi t + \frac{2h}{\pi}t\cos\pi t\right)\sin\pi x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(-\frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1} + \sin\pi t\right)\sin(2n+1)x$$

(значение A_n было указано выше).

16. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ СПОСОБОМ ФУРЬЕ

Рассмотрим в этом разделе как свободные, так и вынужденные малые поперечные колебания мембраны с закрепленными краями. Начнем с решения уравнения свободных колебаний.

1. Пусть в состоянии равновесия пластина занимает прямоугольник $\{0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2\}$ на плоскости xOy и края ее неподвижны (закреплены). Обозначим через $U(x,y,t)$ отклонение точки (x,y) от плоскости в момент t. Тогда, как уже говорилось,

$$U_{tt} - a^2(U_{xx} + U_{yy}) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad U_t(x,y,0) = \psi(x,y),$$

$$U(0,y,t) = U(l_1,y,t) = 0, \quad U(x,0,t) = U(x,l_2,t) = 0.$$

Учитывая опыт, полученный при решении уравнения колебаний струны, будем искать решение этой задачи в виде двойного ряда:

$$U(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Очевидно, что такое $U(x,y,t)$ удовлетворяет граничным условиям. Значит, нужно найти такие $T_{km}(t)$, при которых для $U(x,y,t)$ выполняются уравнение и начальные условия. Для этого прежде всего подставим $U(x,y,t)$ в уравнение. Получим

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(T''_{km}(t)+a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\right)T_{km}(t)\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}=0.$$

Это равенство означает, что при всех рассматриваемых k и m

$$T''_{km}(t)+a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\right)T_{km}(t)=0,$$

т.е. $T_{km}(t)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Как известно, решение такого уравнения имеет вид

$$T_{km}=A_{km}\cos\lambda_{km}t+B_{km}\sin\lambda_{km}t,$$

где $\lambda_{km}=a\pi\sqrt{\dfrac{k^2}{l_1^2}+\dfrac{m^2}{l_2^2}}$.

Следовательно,

$$U(x,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}(A_{km}\cos\lambda_{km}t+B_{km}\sin\lambda_{km}t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Осталось найти коэффициенты A_{km} и B_{km}. Это можно сделать, используя начальные условия задачи. Для этого найдем $U_t(x,y,t)$:

$$U_t(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\lambda_{km}(-A_{km}\sin\lambda_{km}t+B_{km}\cos\lambda_{km}t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Затем подставим U и U_t в начальные условия. Получим

$$\varphi(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}A_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

$$\psi(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\lambda_{km}B_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Эти равенства означают. что величины A_{km} и $\lambda_{km}B_{km}$ являются коэффициентами Фурье функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ при разложении этих функций в двойные ряды Фурье по синусам. Эти коэффициенты находятся по формулам

$$A_{km} = \varphi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy,$$

$$\lambda_{km}B_{km} = \psi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\psi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy.$$

Итак, решением нашей задачи является

$$U(x,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}(A_{km}\cos\lambda_{km}t + B_{km}\sin\lambda_{km}t),$$

где

$$A_{km} = \varphi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy,$$

$$B_{km} = \frac{\psi_{km}}{\lambda_{km}} = \frac{4}{l_1 l_2\lambda_{km}}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\psi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy,$$

$$\lambda_{km} = a\pi\sqrt{\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}}.$$

П р и м е р. Решим такую задачу:

$$U_{tt} - 4(U_{xx}+U_{yy}) = 0 \quad (0\leqslant x\leqslant 2,\ \ 0\leqslant y\leqslant 2,\ \ \ 0\leqslant t<\infty),$$

$$U(x,y,0) = x(2-x)y(2-y),\quad U_t(x,y,0)=0,$$

$$U(0,y,t) = U(2,y,t) = U(x,0,t) = U(x,2,t) = 0.$$

В этой задаче $a=2$, $l_1=l_2=2$, $\varphi(x,y)=x(2-x)y(2-y)$, $\psi(x,y)=0$. Поэтому $B_{km}=0$ и

$$A_{km} = \int\limits_0^2\int\limits_0^2 x(2-x)y(2-y)\sin\frac{k\pi x}{2}\sin\frac{m\pi y}{2}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 x(2-x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx \int\limits_0^2 y(2-y)\sin\frac{m\pi y}{2}dy.$$

Найдем первый из интегралов, используя двукратное интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^2 x(2-x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= -x(2-x)\frac{2}{k\pi}\cos\left.\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 (2-2x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= (2-2x)\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\left.\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2 + \frac{8}{k^2\pi^2}\int\limits_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{16}{k^3\pi^3}\cos\left.\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2 = \frac{16}{k^3\pi^3}(1-(-1)^k).$$

Точно таким же образом получим, что

$$\int\limits_0^2 y(2-y)\sin\frac{m\pi y}{2}dy = \frac{16}{m^3\pi^3}(1-(-1)^m).$$

Поэтому

$$A_{km} = \frac{256}{\pi^6 k^3 m^3}(1-(-1)^k)(1-(-1)^m).$$

Очевидно, что если k или m оказываются четными, то коэффициент равен нулю. Значит, в ряде останутся лишь те коэффициенты, у которых k и m будут нечетными. Положив $k = 2n+1$ и $m = 2l+1$, можем эти оставшиеся коэффициенты записать в виде

$$A_{nl} = \frac{1024}{\pi^6(2n+1)^3(2l+1)^3} \qquad (n, l = 0, 1, 2, ...).$$

Следовательно,

$$U(x,t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} A_{nl}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}\sin\frac{(2l+1)\pi y}{2}\cos 2\lambda_{nl}t,$$

где $\lambda_{nl} = \pi\sqrt{(2n+1)^2+(2l+1)^2}$, а выражение для A_{nl} указано выше.

2. Теперь рассмотрим вынужденные колебания мембраны. В этом случае условия задачи имеют вид

$$U_{tt} - a^2(U_{xx}+U_{yy}) = f(x,y,t)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad U_t(x,y,0) = \psi(x,y),$$

$$U(0,y,t) = U(l_1,y,t) = 0, \quad U(x,0,t) = U(x,l_2,t) = 0.$$

Для решения задачи разложим $f(x,y,t)$ в двойной ряд Фурье по системе функций $\sin\dfrac{k\pi x}{l_1}\sin\dfrac{m\pi y}{l_2}$:

$$f(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

где

$$f_{km}(t) = \frac{4}{l_1 l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} f(x,y,t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy.$$

Функцию $U(x,y,t)$ ищем, как и выше, в виде

$$U(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Подстановка рядов для $U(x,y,t)$ и $f(x,y,t)$ в исходное уравнение приводит к равенству

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(T''_{km}(t) + a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\right)T_{km}(t)\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2} =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

откуда

$$T''_{km}(t) + a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\right)T_{km}(t) = f_{km}(t).$$

Кроме того, из начальных условий нетрудно увидеть, что

$$T_{km}(0) = \varphi_{km}, \quad T'_{km} = \psi_{km},$$

где φ_{km} и ψ_{km} – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$:

$$\varphi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2} \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^{l_2} \varphi(x,y) \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} dxdy,$$

$$\psi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2} \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^{l_2} \psi(x,y) \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} dxdy.$$

Найдя из дифференциального уравнения $T_{km}(t)$, можем построить $U(x,t)$.

17. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ СПОСОБОМ ФУРЬЕ (I)

Будем считать, что в состоянии покоя мембрана занимает на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом r. Обозначим через $U(\rho,\varphi,t)$ смещение точки (ρ,φ) в момент t. Уравнение, описывающее свободные малые поперечные колебания,

$$U_{tt} - a^2 \Delta U = 0$$

преобразуем к полярным координатам, используя запись оператора Лапласа в полярных координатах (раздел 2):

$$U_{tt} - a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) = 0.$$

Начальные условия:

$$U(\rho,\varphi,0) = \psi_1(\rho,\varphi), \qquad U(\rho,\varphi,0) = \psi_2(\rho,\varphi).$$

Если контур мембраны закреплен, то краевое условие имеет вид

$$U(r,\varphi,t) = 0.$$

Если колебания контура заданы, то

$$U(r,\varphi,t)=\mu(\varphi,t).$$

Заметим сразу же, что функции ψ_1, ψ_2 и μ должны иметь период 2π по φ.

Рассмотрим подробно свободные колебания мембраны с закрепленным контуром, вызванные начальными условиями, не зависящими от φ. В этом случае, очевидно, и U не должно зависеть от φ. Значит, в уравнении колебаний не будет ее производных по φ. Следовательно, задача ставится так: требуется найти функцию $U(\rho,t)$ такую, что

$$U_{tt}-a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)=0,$$
$$U(\rho,0)=\psi_1(\rho),\qquad U(\rho,0)=\psi_2(\rho),$$
$$U(r,t)=0.$$

Как и раньше, ищем решение в виде $U(\rho,t)=R(\rho)T(t)$. Тогда уравнение примет вид

$$R(\rho)T''(t)-a^2\left(R''(\rho)T(t)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)T(t)\right)=0,$$

откуда

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{\rho R''(\rho)+R'(\rho)}{\rho R(\rho)}.$$

Обе дроби в этом равенстве должны быть равны постоянной. Обозначим эту постоянную $-\lambda^2$ (можно показать, что при $\lambda^2\geqslant 0$ невозможно удовлетворить краевому условию). Тогда придем к двум дифференциальным уравнениям:

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0,$$

$$\rho R''(\rho)+R'(\rho)+\rho\lambda^2R(\rho)=0.$$

Из первого уравнения следует, что

$$T(t)=A_1\cos a\lambda t+A_2\sin a\lambda t.$$

Во втором уравнении сделаем замену аргумента. Положим $x=\lambda\rho$. Тогда $R'_\rho=R'_x\lambda$ и $R''_\rho=R''_x\lambda^2$. Поэтому уравнение примет вид

$$\frac{x}{\lambda}R''_x\lambda^2+R'_x\lambda+\frac{x}{\lambda}\lambda^2R=0$$

или

$$xR''_x + R'_x + xR = 0.$$

Видно, что мы пришли к уравнению Бесселя (раздел 5), в котором $s = 0$. Общее решение этого уравнения, как было показано:

$$R = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x)$$

или

$$R(\rho) = C_1 J_0(\lambda\rho) + C_2 N_0(\lambda\rho).$$

Итак,

$$U(\rho, t) = (A_1 \cos a\lambda t + A_2 \sin a\lambda t)(C_1 J_0(\lambda\rho) + C_2 N_0(\lambda\rho))$$

Мы рассматриваем малые колебания мембраны, а функция $N_0(x)$ не ограничена в окрестности точки $\rho = 0$. Следовательно, должно быть $C_2 = 0$. Теперь, положив $D_1 = A_1 C_1$ и $D_2 = A_2 C_1$, можем написать:

$$U(\rho, t) = (D_1 \cos a\lambda t + D_2 \sin a\lambda t) J_0(\lambda\rho).$$

Из краевого условия $U(r, t) = 0$ понятно, что $J_0(\lambda r) = 0$. Это означает, что величина λr является корнем функции $J_0(x)$. Мы уже говорили в разделе 6, что $J_0(x)$ имеет бесконечно много корней μ_k $(k = 1, 2, 3, ...)$. Поэтому существует бесконечно много значений λ, для которых выполняется краевое условие: $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{r}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$. Значит, можем построить бесконечно много решений, удовлетворяющих краевому условию:

$$U_k(\rho, t) = \left(D_{1k} \cos \frac{a\mu_k t}{r} + D_{2k} \sin \frac{a\mu_k t}{r} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k \rho}{r} \right).$$

Так как решаемое уравнение однородное, то сумма его решений тоже будет решением. Так что можем построить такое решение:

$$U(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{1k} \cos \frac{a\mu_k t}{r} + D_{2k} \sin \frac{a\mu_k t}{r} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k \rho}{r} \right).$$

Найдем U_t:

$$U_t(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{r} \left(-D_{1k} \sin \frac{a\mu_k t}{r} + D_{2k} \cos \frac{a\mu_k t}{r} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k \rho}{r} \right).$$

Теперь подставим $t = 0$ в U и U_t и используем начальные условия. Получим два уравнения:

$$\psi_1(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right),$$

$$\psi_2(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{r} D_{2k} J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right).$$

Эти уравнения означают, что величины D_{1k} и $\dfrac{a\mu_k}{r} D_{2k}$ являются коэффициентами в разложении $\psi_1(\rho)$ и $\psi_2(\rho)$ в ряды по функциям $J_0\left(\dfrac{\mu_k \rho}{r}\right)$.

Функции $J_0\left(\dfrac{\mu_k \rho}{r}\right)$ образуют систему, ортогональную на промежутке $[0, r]$ с весом ρ. Мы видели это в разделе 6. Поэтому коэффициенты рядов можно найти по формулам для рядов Фурье–Бесселя:

$$D_{1k} = \frac{\int\limits_0^r \rho\psi_1(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right) d\rho}{\int\limits_0^r \rho J_0^2\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right) d\rho}, \quad D_{2k} = \frac{a\mu_k}{r}\ \frac{\int\limits_0^r \rho\psi_2(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right) d\rho}{\int\limits_0^r \rho J_0^2\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right) d\rho}.$$

Если уравнение колебаний неоднородное, т.е. на пластину действует вынуждающая сила, то следует начать решение с разложения правой части уравнения в ряд Фурье–Бесселя.

18. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ СПОСОБОМ ФУРЬЕ (II)

В предыдущем разделе мы рассмотрели колебания мембраны, считая, что их величина не зависит от угла φ. Здесь рассмотрим общий случай:

$$U_{tt} - a^2\left(U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi}\right) = 0 \quad (0 \leqslant \rho \leqslant r,\ 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(\rho, \varphi, 0) = \psi_1(\rho, \varphi), \qquad U_t(\rho, \varphi, 0) = \psi_2(\rho, \varphi),$$

$$U(r, \varphi, t) = 0.$$

Мы говорили раньше, что ψ_1 и ψ_2 должны быть 2π –периодическими функциями от φ .

Ищем решение в виде $U(\rho, \varphi, t) = R(\rho)F(\varphi)T(t)$. При подстановке в уравнение получим

$$R(\rho)F(\varphi)T''(t) - a^2 \left(R''(\rho)F(\varphi)T(t) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)F(\varphi)T(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)F''(\varphi)T(t) \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{R''(\rho)F(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)F(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)F''(\varphi)}{R(\rho)F(\varphi)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2.$$

Следовательно,

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

$$R''(\rho)F(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)F(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)F''(\varphi) + \lambda^2 R(\rho)F(\varphi) = 0.$$

Из первого уравнения, как и ранее, получаем

$$T(t) = A_1 \cos a\lambda t + A_2 \sin a\lambda t.$$

Второе уравнение приводим к виду

$$\frac{R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) + \lambda^2 R(\rho)}{\frac{1}{\rho^2}R(\rho)} = -\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = \nu^2.$$

Отсюда

$$F''(\varphi) + \nu^2 F(\varphi) = 0,$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R(\rho) + (\lambda^2\rho^2 - \nu^2)R(\rho) = 0.$$

Из первого уравнения

$$F(\varphi) = B_1 \cos \nu\varphi + B_2 \sin \nu\varphi.$$

Функция $F(\varphi)$ должна быть 2π-периодической. Поэтому ν должно быть целым числом, так что можно полагать $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$. Значит, можем построить бесконечно много функций F:

$$F_n(\varphi) = B_{1n} \cos n\varphi + B_{2n} \sin n\varphi.$$

В соответствии с этим рассмотрим теперь уравнения

$$\rho^2 R''_n(\rho) + \rho R_n(\rho) + (\lambda^2 \rho^2 - n^2) R_n(\rho) = 0.$$

Сделаем замену $x = \lambda\rho$. Тогда $R'_\rho = R'_x \lambda$, $R''_{\rho\rho} = R''_{xx} \lambda^2$,

$$x^2 R''_{xx} + x R'_x + (x^2 - n^2) R = 0.$$

Получили уравнение Бесселя. Его решением является

$$R_n = C_{1n} J_n(x) + C_{2n} N_n(x).$$

Следовательно,

$$R_n(\rho) = C_{1n} J_n(\lambda\rho) + C_{2n} N_n(\lambda\rho).$$

Колебания всех точек мембраны малы, а $N_n(\lambda\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$. Поэтому следует положить $C_{2n} = 0$. Это означает, что

$$R_n(\rho) = C_{1n} J_n(\lambda\rho).$$

Так как контур пластины неподвижен, то

$$R_n(r) = C_{1n} J_n(\lambda r) = 0,$$

т.е. λr должно являться корнем Бесселевой функции $J_n(x)$. Мы уже говорили, что корней имеется бесконечно много. Обозначим положительные корни функции $J_n(x)$ через $\mu_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и найдем соответствующие им значения $\lambda_k^{(n)} = \dfrac{\mu_k^{(n)}}{r}$.

Итак, существует бесконечно много функций

$$R_{nk}(\rho) = C_{1n} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} \rho}{r}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

удовлетворяющих краевым условиям.

Каждой из этих функций соответствуют

$$T_{nk}(t) = A_{1nk}\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r} + A_{2nk}\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r},$$
$$F_n(\varphi) = B_{1n}\cos n\varphi + B_{2n}\sin n\varphi.$$

Тем самым мы можем построить бесконечно много решений исходного уравнения, удовлетворяющих краевым условиям:

$$U_{nk}(\rho,\varphi,t) = C_{1n}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}\rho}{r}\right)(B_{1n}\cos n\varphi + B_{2n}\sin n\varphi)\times$$
$$\times\left(A_{1nk}\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r} + A_{2nk}\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r}\right).$$

В силу однородности уравнения сумма его решений тоже будет решением. Значит, можно получить такое решение:

$$U(\rho,\varphi,t) = \sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty} C_{1n}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}\rho}{r}\right)(B_{1n}\cos n\varphi + B_{2n}\sin n\varphi)\times$$
$$\times\left(A_{1nk}\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r} + A_{2nk}\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r}\right).$$

Если внутри сумм раскрыть скобки, сделать перегруппировку и изменить названия коэффициентов, то можно записать:

$$U(\rho,\varphi,t) = \sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\left(\left(A_{nk}\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r} + B_{nk}\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r}\right)\cos n\varphi +\right.$$
$$\left.+\left(C_{nk}\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r} + D_{nk}\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r}\right)\sin n\varphi\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}\rho}{r}\right).$$

Коэффициенты A_{nk}, B_{nk}, C_{nk} и D_{nk} можно найти, используя разложение начальных функции $\psi_1(\rho,\varphi)$ и $\psi_2(\rho,\varphi)$ в двойные ряды Фурье–Бесселя.

19. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Имеется нагретое тело. Пусть $U(x,y,z,t)$ – температура точки $M(x,y,z)$ тела в момент времени t. Мы хотим выяснить, как ведет себя температура в зависимости от точки тела и от времени. Для этого выведем уравнение, которому она подчиняется.

Выделим в теле некоторую часть T, ограниченную поверхностью S, и подсчитаем тепловой баланс этой части за короткий промежуток времени $[t, t+dt]$. Введем обозначения: c – удельная теплоемкость (в расчете на единицу массы), ρ – плотность. Эти величины считаем постоянными.

Пусть Q – изменение количество тепла в выделенной части T за некоторый промежуток времени. Тогда главная часть изменения Q в малой части объема dV за время dt будет $dQ = U_t dt c\rho dV$, откуда для всей части за время dt изменение количества тепла оказывается равным:

$$Q = \iiint\limits_T c\rho U_t(x, y, z, t) dV dt.$$

С другой стороны, Q является суммой теплоты Q_1, полученной за то же время от ее источников внутри T, и теплоты Q_2, полученной T через поверхность S за счет теплообмена с внешней частью. Если плотность источников тепла в точке $M(x, y, z)$ в момент t равна $F(x, y, z, t)$, то количество тепла, полученного малым объемом dV за время dt, равно $dQ_1 = F(x, y, z, t) dV dt$. Поэтому

$$Q_1 = \iiint\limits_T F(x, y, z, t) dV dt.$$

Далее, через малую часть поверхности $d\sigma$ от внешней части тела T за время dt передается количество теплоты $dQ_2 = k\ \mathrm{grad}_n U d\sigma dt$, где k – коэффициент внутренней теплопроводности, $\mathrm{grad}_n U$ – проекция $\mathrm{grad}\ U$ на нормаль к поверхности. Отсюда

$$Q_2 = \iint\limits_S k\ \underset{n}{\mathrm{grad}}\, U d\sigma dt.$$

Используя формулу Гаусса–Остроградского, интеграл по поверхности сведем к тройному. Получим

$$Q_2 = \iiint\limits_T k\ \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ U dV dt = \iiint\limits_T k\ \Delta U dV dt$$

(напомним. что div grad $U = \Delta U$, где Δ – оператор Лапласа). Так как $Q = Q_1 + Q_2$, то

$$\iiint\limits_T c\rho U_t(x,y,z,t)dV\ dt =$$

$$= \iiint\limits_T F(x,y,z,t)dVdt + \iiint\limits_T k\ \Delta U dVdt.$$

Перенося все в одну часть и сокращая на dt , получаем

$$\iiint\limits_T (c\rho U_t(x,y,z,t) - k\ \Delta U - F(x,y,z,t))dV = 0.$$

Написанный интеграл равен нулю для любой части T тела. Это возможно лишь тогда, когда во всех точках подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно,

$$c\rho U_t(x,y,z,t) - k\ \Delta U - F(x,y,z,t) = 0$$

или

$$U_t(x,y,z,t) - \frac{k}{c\rho}\ \Delta U - \frac{1}{c\rho}F(x,y,z,t) = 0.$$

Затем для сокращения записи положим

$$\frac{1}{c\rho}F(x,y,z,t) = f(x,y,z,t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.$$

Теперь можем записать полученное уравнение в стандартной форме:

$$U_t - a^2\Delta U = f(x,y,z,t).$$

Это уравнение называют уравнением теплопроводности. Величину a^2 в нем называют коэффициентом температуропроводности.

Для решения конкретных задач к уравнению следует добавить начальное и граничные условия. Начальное условие:

$$U(x,y,z,0) = \psi(x,y,z).$$

Граничные условия бывают трех родов:

1) $U(x,y,z,t) = \mu(x,y,z,t)$ при $(x,y,z) \in S$;

2) $\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial n} = \nu(x,y,z,t)$ при $(x,y,z) \in S$ ($\overline{n}$ – нормаль к поверхности S);

3) $\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial n} = h(U(x,y,z,t) - U_0(x,y,z,t))$, $(x,y,z) \in S$, где U_0 – заданная функция (обычно U_0 – температура внешней среды).

Остановимся на одном частном случае. Если тело одномерное (нагретый стержень), то уравнение принимает вид

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t),$$

а начальное условие становится таким:

$$U(x,0) = \psi(x).$$

Если стержень имеет конечную длину и занимает на оси Ox промежуток $[0,l]$, то граничные условия имеют вид:

1) $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(l,t) = \mu_2(t)$;

2) $U_x(0,t) = \nu_1(t)$, $U_x(l,t) = \nu_2(t)$;

3) $U_x(0,t) = h(U(0,t) - U_0(t))$, $U_x(l,t) = -h(U(l,t) - U_0(t))$, где $U_0(t)$ – известная функция.

20. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Будем считать, что стержень занимает промежуток $[0,l]$ на оси Ox.

I. Начнем с граничных условий первого типа. В этом случае задача ставится так:

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0,$$

$$U(x,0) = \psi(x).$$

Как и ранее, ищем решение в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$X(x)t'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0,$$

откуда

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Нетрудно показать, как уже делалось раньше, что правая часть последнего равенства должна быть отрицательной.

Ясно, что

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Решая эти дифференциальные уравнения, находим

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X(x) = B_1 \cos\lambda x + B_2 \sin\lambda x.$$

В силу краевых условий

$$T(t)X(0) = 0, \quad T(t)X(l) = 0.$$

Так как $T(t)$, вообще говоря, отлична от нуля, то должно быть $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, т.е.

$$B_1 = 0, \quad B_2 \sin\lambda l = 0.$$

Из последнего равенства следует, что существует бесконечно много значений λ, для которых выполняются краевые условия: $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$. Поэтому имеется бесконечно много решений исходного уравнения:

$$U_k(x,t) = C_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{l^2}} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

(здесь $C_k = A_k D_{2k}$). Так как уравнение однородное, то сумма его решений тоже является решением, т.е.

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{l^2}} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Положив в этом решении $t = 0$, получим из начального условия

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Ясно, что величины C_k являются коэффициентами Фурье функции $\psi(x)$ при разложении ее ряд по синусам на промежутке $[0, l]$. Поэтому

$$C_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Задача решена.

П р и м е р 1. Пусть

$$U_t - 4U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(2,0) = 0.$$

В этом случае

$$C_k = \int\limits_0^1 x \sin \frac{k\pi x}{2} dx + \int\limits_1^2 (2-x) \sin \frac{k\pi x}{2} dx.$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$C_k = -x \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 -$$

$$-(2-x) \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_1^2 - \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_1^2 = \frac{8}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

При $k = 2n$ будет $C_{2n} = 0$. Если $k = 2n+1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), то

$$C_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos n\pi =$$

$$= \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в формулу для решения, получим

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

II. Рассмотрим задачу с краевыми условиями второго рода. Она ставится так:

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U_x(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0,$$

$$U(x,0) = \psi(x).$$

Опять ищем решение в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$. Получим, как и раньше,

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x.$$

В силу краевых условий должно быть $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$. Так как

$$X'(x) = -B_1 \lambda \sin \lambda x + B_2 \lambda \cos \lambda x,$$

то

$$B_2 \lambda = 0, \quad -B_1 \lambda \sin \lambda l + B_2 \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Эти уравнения, очевидно, выполняется, если $\lambda = 0$. При этом оказывается $T(t) = A$ и $X(x) = B_1$, откуда $U(x,t) = AB_1$. Положим $AB_1 = \dfrac{a_0}{2}$ и запишем это решение в виде $U_0(x,t) = \dfrac{a_0}{2}$.

Если допустить, что $\lambda \neq 0$, то $B_2 = 0$ и $\sin \lambda l = 0$, откуда $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$. Это значит, что существует бесконечно много решений, удовлетворяющих краевым условиям. Эти решения имеют вид

$$U_k(x,t) = a_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Теперь можем построить решение:

$$U(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Подставим в него $t = 0$ и используем начальное условие. Получим

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Как было сказано в разделе 2, коэффициенты этого ряда находятся по формуле

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Эти коэффициенты нужно подставить в выражение для $U(x,t)$.

П р и м е р 2. Решим такую задачу:

$$U_t - 9U_{xx} = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 2 - \frac{2}{3}x & \text{при } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

$$U(x,0) = 0,$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(3,t) = 0.$$

Здесь $l = 3$ и правая часть уравнения не зависит от t. Поэтому

$$f_k = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}x\sin\frac{k\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int\limits_{\frac{3}{2}}^3 \left(2 - \frac{2}{3}x\right)\sin\frac{k\pi x}{3}dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$f_k = \frac{4}{9}x\left(-\frac{3}{k\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_0^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3k\pi}\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\cos\frac{k\pi x}{3}dx +$$

$$+\frac{2}{3}\left(2 - \frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{3}{k\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_{\frac{3}{2}}^3 - \frac{4}{3k\pi}\int\limits_{\frac{3}{2}}^3\cos\frac{k\pi x}{3}dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\bigg|_0^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} -$$

$$-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\bigg|_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Видно, что $f_k = 0$ при четном k. Если же $k = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, то

$$f_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos n\pi =$$

$$= (-1)^n \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Так как $\psi(x) = 0$, то все $\psi_k = 0$.

Подставив полученные данные в формулу для решения, найдем

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} e^{(2n+1)^2\pi^2\tau}\, d\tau \right) \times$$

$$\times e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{3}.$$

Проведя несложное интегрирование, получим

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^4\pi^4} \left(e^{(2n+1)^2\pi^2 t} - 1 \right) \times$$

$$\times\ e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{3}$$

или

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^4\pi^4} \left(1 - e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \right) \sin\frac{(2n+1)\pi x}{3}.$$

Решение уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего типа производится аналогично, но более громоздко. Мы на этом случае останавливаться не будем.

21. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

I. Остановимся вначале на задаче с нулевыми краевыми условиями первого типа:

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0)=\psi(x),$$
$$U(0,t)=0, \quad U(l,t)=0.$$

Для решения разложим функции $f(x,t)$ и $\psi(x)$ в ряд по $\sin\dfrac{k\pi x}{l}$, т.е. представим их в виде

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

и

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad \psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Решение задачи ищем в виде

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя это в уравнение, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\frac{k\pi x}{l}+a^2\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\frac{k^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t)+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T_k(t)\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Понятно, что при всех k должны выполняться равенства

$$T_k'(t)+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T_k(t)=f_k(t),$$

т.е. $T_k(t)$ должно быть решением линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t)=\left(\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{a^2k^2\pi^2\tau}{l^2}}\,d\tau+C_k\right)e^{-\frac{a^2k^2\pi^2\tau}{l^2}}$$

(известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений). При $t = 0$, учитывая начальное условие, получим $C_k = \psi_k$. Таким образом, решением нашей задачи является

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{a^2k^2\pi^2\tau}{l^2}}\, d\tau + \psi_k \right) e^{-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{l^2}} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $f_k(t)$ и ψ_k находятся по приведенным ранее формулам.

П р и м е р. Решим такую задачу:

$$U_t - 9U_{xx} = f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ 2 - \dfrac{2}{3}x & \text{при } \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

$$U(x,0) = 1,$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(3,t) = 0.$$

Здесь $l = 3$ и правая часть уравнения не зависит от t. Поэтому

$$f_k = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}x \sin\frac{k\pi x}{3} dx + \frac{2}{3}\int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(2 - \frac{2}{3}x\right) \sin\frac{k\pi x}{3} dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f_k = \frac{4}{9}x\left(-\frac{3}{k\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3k\pi}\int_0^{\frac{3}{2}} \cos\frac{k\pi x}{3} dx +$$

$$+\frac{2}{3}\left(2 - \frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{3}{k\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{3} - \frac{4}{3k\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{3} \cos\frac{k\pi x}{3} dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} -$$

$$-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Видно, что $f_k = 0$ при четном k. Если же $k = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, то

$$f_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos n\pi =$$

$$= (-1)^n \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Так как $\psi(x) = 1$, то

$$\psi_k = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 \sin\frac{k\pi x}{3} dx = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{k\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_0^3 = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^n).$$

Опять коэффициенты с четными номерами оказываются равными нулю, а при $k = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ получается $\psi_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$.

Подставив найденные коэффициенты в формулу для решения, найдем

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^t \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} e^{(2n+1)^2\pi^2\tau}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{(2n+1)\pi}\right) e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{3}.$$

Проведя несложное интегрирование, получим

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^4\pi^4}\left(e^{(2n+1)^2\pi^2 t} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{(2n+1)\pi}\right) e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{3}$$

II. Пусть решается неоднородное уравнение с нулевыми краевыми условиями второго типа, т.е задача имеет вид

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0)=\psi(x),$$
$$U_x(0,t)=0,\quad U_x(l,t)=0.$$

В этом случае начнем с разложения функций $f(x,t)$ и $\psi(x)$ в ряд по системе косинусов:

$$f(x,t)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{k\pi x}{l},\quad \psi(x)=\frac{\psi_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\cos\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\quad \psi_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Затем будем искать решение в виде ряда:

$$U(x,t)=\frac{T_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Тогда подстановка $U(x,t)$ в уравнение, начальные и краевые условия приведет к уравнениям того же вида, что и в предыдущем случае. Поэтому подробно рассматривать этот случай мы не будем.

22. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ С НЕНУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

I. Опять начнем со случая, когда краевые условия первого типа ненулевые, т.е рассмотрим такую задачу:

$$U_t-a^2U_{xx}=f(x,t)\quad (0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t<\infty),$$
$$U(x,0)=\psi(x),$$
$$U(0,t)=\mu_1(t),\quad U(l,t)=\mu_2(t).$$

Чтобы получить задачу с нулевыми краевыми условиями, сделаем замену искомой функции по формуле

$$U(x,t)=V(x,t)+\frac{l-x}{l}\mu_1(t)+\frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Тогда

$$U_{xx} = V_{xx}, \quad U_t = V_t + \frac{l-x}{l}\mu_1'(t) + \frac{x}{l}\mu_2'(t).$$

Поэтому для V задача оказывается задачей с нулевыми краевыми условиями:

$$V_t - a^2 V_{xx} = f(x,t) - \frac{l-x}{l}\mu_1'(t) - \frac{x}{l}\mu_2'(t)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$V(x,0) = \psi(x) - \frac{l-x}{l}\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0),$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0.$$

П р и м е р 1. Найдем $U(x,t)$, если

$$U_t - 4U_{xx} = 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = 3 + x(2-x),$$

$$U(0,t) = 3, \quad U(2,t) = 3.$$

В соответствии со сказанным делаем замену

$$U(x,t) = V(x,t) + 3.$$

Получаем такую задачу для $V(x,t)$:

$$V_t - 4V_{xx} = 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$V(x,0) = x(2-x),$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(2,t) = 0.$$

Способ решения полученной задачи изложен в предыдущем разделе.

II. Если заданы ненулевые краевые условия второго типа, т.е. задача ставится так:

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \psi(x),$$

$$U_x(0,t) = \nu_1(t), \quad U_x(l,t) = \nu_2(t),$$

то замена

$$U(x,t) = V(x,t) - \frac{(l-x)^2}{2l}\nu_1(t) + \frac{x^2}{2l}\nu_2(t)$$

приводит к задаче с нулевыми краевыми условиями.

Действительно,

$$U_x(x,t) = V_x(x,t) + \frac{l-x}{l}\nu_1(t) + \frac{x}{l}\nu_2(t).$$

Поэтому

$$U_x(0,t) = \nu_1(t) = V_x(0,t) + \nu_1(t),$$
$$U_x(l,t) = \nu_2(t) = V_x(l,t) + \nu_2(t).$$

Из написанных равенств видно, что $V_x(0,t) = V_x(l,t) = 0$.

В соответствии со сказанным, как нетрудно увидеть, задача для V оказывается такой:

$$V_t - a^2 V_{xx} = f(x,t) - \frac{(l-x)^2}{2l}\nu_1'(t) + \frac{x^2}{2l}\nu_2'(t) + \frac{1}{l}\nu_1(t) - \frac{1}{l}\nu_2(t),$$

$$V(x,0) = \psi(x) + \frac{(l-x)^2}{2l}\nu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(0),$$
$$V_x(0,t) = V_x(l,t) = 0.$$

П р и м е р.

$$U_t - 4U_{xx} = 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = x(2-x),$$
$$U_x(0,t) = 2, \quad U(2,t) = -2.$$

Для решения полагаем

$$U(x,t) = V(x,t) - \frac{(2-x)^2}{4}2 - \frac{x^2}{4}2,$$

т.е.

$$U(x,t) = V(x,t) - 2 + 2x - x^2.$$

Поэтому

$$U_t(x,t) = V_t(x,t),$$
$$U_x(x,t) = V_x(x,t) + 2 - 2x,$$

$$U_{xx} = V_{xx} - 2.$$

Следовательно, задача для $V(x,t)$ ставится так:

$$V_t - 4V_{xx} = -7,$$

$$V(x,0) = 2,$$

$$V_x(0,t) = V(2,t) = 0.$$

Рекомендуем читателю довести решение до конца.

23. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Будем считать стержень бесконечно длинным ($-\infty < x < \infty$). В этом случае никаких краевых условий ставить не следует. Достаточно иметь лишь начальные условия. Значит,

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \ \ 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x,0) = \psi(x).$$

Для того чтобы решить задачу, перейдем в написанных равенствах к изображению по Фурье по аргументу x .

Пусть

$$\Psi(i\omega)_* = {}^*\psi(x), \qquad \mathbf{U}(i\omega,t)_* = {}^*U(x,t).$$

Тогда, в силу свойств изображения (см. раздел 7),

$$-\omega^2 \mathbf{U}(i\omega,t)_* = {}^*U_{xx}(x,t), \qquad \mathbf{U}_t(i\omega,t)_* = {}^*U_t(x,t).$$

Теперь перейдем к изображениям в уравнении. Получим

$$\mathbf{U}_t(i\omega,t) + a^2\omega^2 \mathbf{U}(i\omega,t) = 0,$$

откуда

$$\frac{\mathbf{U}_t(i\omega,t)}{\mathbf{U}(i\omega,t)} = -a^2\omega^2.$$

Интегрируя обе части равенства по t, находим

$$\ln \mathbf{U}(i\omega, t) = -a^2\omega^2 t + \ln C$$

или

$$\mathbf{U}(i\omega, t) = Ce^{-a^2\omega^2 t}.$$

При $t = 0$ должно быть $\mathbf{U}(i\omega, 0) = \Psi(i\omega)$. Поэтому, $C = \Psi(i\omega)$. Таким образом, $\mathbf{U}(i\omega, t)$ оказывается произведением двух изображений:

$$\mathbf{U}(i\omega, t) = \Psi(i\omega)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Поэтому оригинал $U(x, t)$ должен быть сверткой соответствующих оригиналов (см. раздел 7). Так как

$$\Psi(i\omega)_* = {}^*\psi(x) \quad \text{и} \quad e^{-a^2\omega^2 t}{}_* = {}^*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\dfrac{x^2}{4a^2 t}},$$

то решением задачи будет

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Нетрудно проверить, что функция $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ является решением однородного уравнения теплопроводности. Ее называют фундаментальным решением, поскольку с ее помощью можно найти решение при любом начальном условии.

24. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть пластина занимает на плоскости xOy прямоугольник, так что $\{0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2\}$. Известна температура всех ее точек в момент $t = 0$: $U(x, y, 0) = \psi(x, y)$. Кроме того, на границах поддерживается постоянная температура, равная нулю. Тогда задача имеет такой вид:

$$U_t - a^2(U_{xx} + U_{yy}) = f(x, y, t)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(x, y, 0) = \psi(x, y),$$

$$U(0, y, t) = U(l_1, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, l_2, t) = 0.$$

Учитывая нулевые краевые условия, ищем решение задачи в виде

$$U(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}.$$

Очевидно, что краевые условия для нашей функции выполнены. Разложим $f(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ в ряды по функциям $\sin \dfrac{k\pi x}{l_1} \sin \dfrac{m\pi y}{l_2}$:

$$f(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2},$$

$$\psi(x, y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \psi_{km} \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2},$$

где

$$f_{km}(t) = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} f(x, y, t) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dy,$$

$$\psi_{km} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} \psi(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dy.$$

Подставляя $U(x, y, t)$ и $f(x, y, t)$ в уравнение, получаем

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} T'_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} +$$

$$+ a^2 \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t) \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}.$$

Из этого уравнения следует, что должны выполняться равенства

$$T'_{km}(t) + a^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)T_{km}(t) = f_{km}(t) \quad (k, m = 1, 2, 3, ...).$$

В силу начального условия

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(0)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \psi_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

откуда $T_{km}(0) = \psi_{km}$.

Таким образом, функции T_{km} являются решениями дифференциальных уравнений, удовлетворяющими определенным начальным условиям. Найдя $T_{km}(t)$, построим решение нашей задачи.

25. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Будем считать, что пластина занимает на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом r. Для решения задачи запишем уравнение теплопроводности в полярных координатах ρ и φ. При этом будем считать, что температура зависит лишь от расстояния до центра, т.е. от ρ, и не зависит от полярного угла φ. Предположим также, что на границе круга поддерживается постоянная температура, равная нулю. В этом случае задача ставится так:

$$U_t - a^2\left(U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho\right) = 0 \quad (0 \leqslant \rho \leqslant r, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(\rho, 0) = \psi(\rho), \quad U(r, t) = 0.$$

Ищем решение в виде $U(\rho, t) = R(\rho)T(t)$. Тогда уравнение принимает вид

$$R(\rho)T'(t) - a^2\left(R''(\rho)T(t) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)T(t)\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)}{R(\rho)}.$$

Так как дроби зависят от различных аргументов, то они должны быть равными одной и той же постоянной. Можно показать, как это уже делалось раньше, что эта постоянная должна быть отрицательной. Обозначив эту постоянную через $-\lambda^2$, придем к дифференциальным уравнениям:

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

$$\rho R''(\rho) + R'(\rho) + \lambda^2 \rho R(\rho) = 0.$$

Из первого уравнения следует, что

$$T(t) = Ae^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Во втором уравнении делаем замену, полагая $x = \lambda\rho$. Эта замена приведет уравнение к уравнению Бесселя порядка ноль (см. раздел 4):

$$xR_{xx} + R_x + xR = 0.$$

Общим решением этого уравнения является

$$R = B_1 J_0(x) + B_2 N_0(x),$$

т.е.

$$R(\rho) = B_1 J_0(\lambda\rho) + B_2 N_0(\lambda\rho).$$

Температура всех точек круга ограничена, а $N(\lambda\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$. Поэтому следует взять $B_2 = 0$. Следовательно, $R(\rho) = B_1 J_0(\lambda\rho)$.

В силу краевого условия $J_0(\lambda r) = 0$, т.е. λr должно быть корнем функции Бесселя. Мы уже говорили, что этих корней существует бесконечно много. Обозначив положительные корни через μ_k, получаем бесконечно много значений $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{r}$ и, соответственно, бесконечно много решений, удовлетворяющих краевому условию:

$$U_k(\rho, t) = D_k e^{\frac{-a^2\mu_k^2 t}{r^2}} J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right) \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Так как сумма этих решений тоже удовлетворяет уравнению, то можно построить решение

$$U(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{\frac{-a^2\mu_k^2 t}{r^2}} J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right).$$

При $t = 0$

$$\psi(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_0\left(\frac{\mu_k \rho}{r}\right).$$

Видно, что величины являются коэффициентами при разложении функции в ряд Фурье–Бесселя. Как было показано в разделе 16, они находятся по формуле

$$D_k = \frac{\int\limits_0^r \rho\psi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{r}\right) d\rho}{\int\limits_0^r \rho J_0^2\left(\frac{\mu_k\rho}{r}\right) d\rho}$$

26. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ШАРА

Тело представляет собой шар с центром в начале координат и радиусом R. Поэтому задачу будем решать в сферических координатах.

Считаем, что на сфере, ограничивающей шар, поддерживается постоянная температура, равная нулю. В начальный момент для каждой точки (r, θ, φ) известна температура $\psi(r)$. Так как начальная и граничная температуры не зависят от θ и φ, то температура не зависит от этих координат при всех t. Обозначив искомую температуру $U(r,t)$, получаем задачу

$$U_t - a^2\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(r,0) = \psi(r), \quad U(R,t) = 0.$$

Чтобы решить уравнение, сделаем замену: $U = \dfrac{V}{r}$. Тогда

$$U_t = \frac{V_t}{r}, \qquad U_r = \frac{V_r r - V}{r^2},$$

$$U_{rr} = \frac{(V_{rr} r + V_r - V_r) r^2 - 2r(V_r r - V)}{r^4} = \frac{V_{rr} r^2 - 2V_r r + 2V}{r^3}.$$

Подставив эти выражения в уравнение, получаем после несложных преобразований

$$V_t - a^2 V_{rr} = 0.$$

Начальное условие для V имеет вид $V(r,0) = r\psi(r)$, а граничное $V(R,t) = 0$.

Кроме того, так как $U = \dfrac{V}{r}$, то, для того чтобы значение U было конечным при $r = 0$, нужно, чтобы было $V(0,t) = 0$.

Таким образом, задача для функции v имеет вид

$$V_t - a^2 V_{rr} = 0,$$

$$V(r,0) = r\psi(r),$$

$$V(0,t) = v(R,t) = 0.$$

Эта задача совпадает с задачей теплопроводности для конечного стержня, решенной нами в разделе 20. Отличие состоит лишь в обозначении величин. Поэтому нужно заменить в том решении обозначения. В результате получим

$$V(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{R^2}} \sin\frac{k\pi r}{R},$$

где

$$C_k = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\psi(r)\sin\frac{k\pi r}{R}dr.$$

Зная $V(r,t)$, находим $U(r,t)$:

$$U(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{R^2}} \sin\frac{k\pi r}{R},$$

27. УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Если с течением времени температура U точек тела T не меняется, а на границе S тела поддерживается определенный температурный режим, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta U = 0.$$

Если при этом в теле имеется не меняющийся с течением времени источник тепла, то

$$\Delta U = f(x, y, z).$$

Уравнение $\Delta U = 0$ называют уравнением Лапласа, а $\Delta U = f$ – уравнением Пуассона.

Уравнение Лапласа возникает также в гидродинамике при изучении движения несжимаемой жидкости. Пусть $v(x, y, z)$ – скорость потока в точке (x, y, z). Равенство $\operatorname{div} v = 0$ является условием сплошности потока. Если скорость имеет потенциал, т.е. $v = \operatorname{grad} U$, где $U(x, y, z)$ – некоторая функция, то оказывается $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$, или

$$\Delta U = 0.$$

Оба уравнения встречаются также при изучении электромагнитных полей.

Краевые условия для этих уравнений бывают трех родов:

1) $U(x, y, z) = \mu(x, y, z)$ при $(x, y, z) \in S$;

2) $\dfrac{\partial U(x, y, z)}{\partial n} = \nu(x, y, z)$ при $(x, y, z) \in S$ ($\overline{n}$ – нормаль к поверхности S);

3) $\dfrac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial n} + hU(x, y, z, t) = \mu(x, y, z)$ при $(x, y, z) \in S$.

Задача о нахождении решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего первому из краевых условий, называется задачей Дирихле. Если для уравнения Лапласа ставится второе краевое условие, то задача называется задачей Неймана.

28. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ КРУГА

Рассмотрим задачу

$$\Delta U = 0 \quad (0 \leqslant \rho \leqslant r, \quad 0 \leqslant t < \infty),$$

$$U(r, \varphi) = \mu(\varphi).$$

Заметим сразу же, что функция $\mu(\varphi)$ должна иметь период 2π.

Для решения запишем уравнение в полярных координатах:

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_\rho + \frac{1}{\rho^2} U_{\varphi\varphi} = 0.$$

Решение ищем в виде $U = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Тогда

$$R''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda^2.$$

Это приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos\lambda\varphi + A_2 \sin\lambda\varphi.$$

Функция $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π-периодической. Значит, λ должно быть целым. Положив $\lambda_k = k \quad (k = 0, 1, 2, ...)$, получим бесконечно много функций

$$\Phi_0(\varphi) = A_{10} \quad \text{и} \quad \Phi_k(\varphi) = A_{1k}\cos k\varphi + A_{2k}\sin k\varphi.$$

Соответствующее уравнение для $R(\rho)$ имеет вид

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0.$$

Если $k = 0$, то уравнение оказывается таким:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0.$$

Интегрируя, находим $\ln R_0'(\rho) = -\ln\rho + \ln B_0$. Отсюда $R_0'(\rho) = \dfrac{B_0}{\rho}$. Проведя еще одно интегрирование, получаем

$$R_0(\rho) = B_0 \ln\rho + C_0.$$

При $k = 1, 2, 3, ...$ решение уравнения ищем в виде $R(\rho) = \rho^\alpha$. Подставим это в уравнение:

$$\rho^2\alpha(\alpha - 1)\rho^{\alpha-2} + \rho\alpha\rho^{\alpha-1} - k^2\rho^\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\alpha^2 - k^2 = 0.$$

Значит, $\alpha = \pm k$. Поэтому получаем два линейно независимых решения ρ^k и ρ^{-k}.Это позволяет построить общее решение дифференциального уравнения:

$$R_k(\rho) = B_k \rho^{-k} + C_k \rho^{-k}.$$

Так как $\ln \rho \to \infty$ и $\rho^{-k} \to \infty$ при $\rho \to 0$, а решение должно быть ограниченным, то следует положить все $B_k = 0$. Следовательно,

$$R_0(\rho) = C_0, \quad R_k(\rho) = C_k \rho^k \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Итак, мы построили бесконечно много решений исходного уравнения:

$$U_0 = A_0 C_0, \quad U_k = C_k \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi).$$

Введем новые обозначения постоянных: $\dfrac{a_0}{2} = A_0 C_0$, $a_k = C_k A_k$ и $b_k = C_k B_k$. Теперь решения имеют вид

$$U_0 = \frac{a_0}{2}, \quad U_k = \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Уравнение Лапласа однородное, а потому сумма его решений тоже будет решением. Значит, решением является

$$U(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Чтобы найти коэффициенты построенного ряда, используем краевое условие. При $\rho = r$ получаем

$$\mu(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Полученное означает, что величины $\dfrac{a_0}{2}$, $r^k a_k$, $r^k b_k$ являются коэффициентами Фурье функции $\mu(\varphi)$. Используя формулы для коэффициентов Фурье находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\vartheta) d\vartheta, \quad a_k = \frac{1}{\pi r^k} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi r^k} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\vartheta) \sin k\vartheta d\vartheta.$$

Задача Дирихле решена.

Заметим, что полученное решение можно записать в более компактной форме. Мы покажем это, предварительно доказав одно вспомогательное равенство.

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k\alpha,$$

в котором $|t| < 1$.

С помощью формулы Эйлера преобразуем этот ряд:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k\alpha = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \ \frac{e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (te^{i\alpha})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (te^{-i\alpha})^k \right).$$

Последние два ряда составлены из членов геометрических прогрессий со знаменателями $te^{i\alpha}$ и $te^{-i\alpha}$. Так как $|te^{i\alpha}| = |te^{-i\alpha}| = |t| < 1$, то оба ряда сходятся. Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (te^{i\alpha})^k = \frac{te^{i\alpha}}{1 - te^{i\alpha}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (te^{-i\alpha})^k = \frac{te^{-i\alpha}}{1 - te^{-i\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{te^{i\alpha}}{1 - te^{i\alpha}} + \frac{te^{-i\alpha}}{1 - te^{-i\alpha}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{(1 - te^{i\alpha})(1 - te^{-i\alpha})} = \frac{1}{2} \ \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \alpha + t^2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k\alpha = \frac{1}{2} \ \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \alpha + t^2}.$$

Теперь вернемся к построенному решению задачи Дирихле:

$$U(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Заменим входящие в него коэффициенты их выражением через интегралы:

$$U(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\,d\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\pi r^k}\left(\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta\ \cos k\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta\ \sin k\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)d\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\cos k(\vartheta-\varphi)d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{r^k}\cos k(\vartheta-\varphi)\right)d\vartheta.$$

К ряду, стоящему под знаком интеграла, применим выведенную выше формулу. Получим

$$U(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\vartheta)\frac{r^2-\rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\vartheta-\varphi)+\rho^2}\ d\vartheta.$$

Получили формулу Пуассона, позволяющую записать решение задачи Дирихле в компактной форме.

29. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

I. Начнем с уравнения Лапласа, т.е. решим такую задачу:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l_1,\quad 0 \leqslant y \leqslant l_2),$$

$$U(0,y)=\mu_1(y),\quad U(l_1,y)=\mu_2(y),$$
$$U(x,0)=\mu_3(x),\quad U(x,l_2)=\mu_4(x).$$

Будем искать решение в виде суммы двух функций:

$$U(x,y)=V(x,y)+W(x,y).$$

Слагаемые будем искать как решения таких задач:

$$V_{xx}+V_{yy}=0\quad (0\leqslant x\leqslant l_1,\ \ 0\leqslant y\leqslant l_2),$$
$$V(0,y)=0,\quad V(l_1,y)=0,$$
$$V(x,0)=\mu_3(x),\quad V(x,l_2)=\mu_4(x)$$

и

$$W_{xx}+W_{yy}=0\quad (0\leqslant x\leqslant l_1,\ \ 0\leqslant y\leqslant l_2),$$
$$W(0,y)=\mu_1(y),\quad W(l_1,y)=\mu_2(y),$$
$$W(x,0)=0,\quad W(x,l_2)=0.$$

Найдем вначале $V(x,y)$. Для этого заметим, что функция $\sin\dfrac{k\pi x}{l_1}$ $(k=1,2,3,...)$ равна нулю при $x=0$ и $x=l_1$. Поэтому будем искать решения уравнения для $V(x,y)$ в виде $V_k(x,y)=Y_k(y)\sin\dfrac{k\pi x}{l_1}$. Тогда, подставив $V_k(x,y)$ в уравнение, получим

$$Y_k''(y)-\frac{k^2\pi^2}{l_1^2}Y_k(y)=0.$$

Из этого линейного дифференциального уравнения второго порядка видно, что

$$Y_k(y)=A_ke^{\frac{k\pi y}{l_1}}+B_ke^{-\frac{k\pi y}{l_1}}.$$

Следовательно,

$$V_k(x,y)=\left(A_ke^{\frac{k\pi y}{l_1}}+B_ke^{-\frac{k\pi y}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}.$$

Для всех построенных решений выполняется первая пара краевых условий.

Так как уравнение однородное, то сумма его решений тоже будет решением:

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{l_1}}+B_k e^{-\frac{k\pi y}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}.$$

Подставим построенное во вторую пару граничных условий:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{k\pi x}{l_1}=\mu_1(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi l_2}{l_1}}+B_k e^{-\frac{k\pi l_2}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}=\mu_2(x).$$

Видно, что величины A_k+B_k и $A_k e^{\frac{k\pi l_2}{l_1}}+B_k e^{-\frac{k\pi l_2}{l_1}}$ являются коэффициентами в разложении функций $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ в ряд по синусам. Так что

$$A_k+B_k=\frac{2}{l_1}\int\limits_0^{l_1}\mu_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx,$$

$$A_k e^{\frac{k\pi l_2}{l_1}}+B_k e^{-\frac{k\pi l_2}{l_1}}=\frac{2}{l_1}\int\limits_0^{l_1}\mu_2(x)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx.$$

Из последней пары уравнений легко находятся A_k и B_k:

$$A_k=\frac{1}{l_1\operatorname{sh}\frac{k\pi l_2}{l_1}}\int\limits_0^{l_1}\left(\mu_2(x)-\mu_1(x)e^{-\frac{k\pi l_2}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx,$$

$$B_k=\frac{1}{l_1\operatorname{sh}\frac{k\pi l_2}{l_1}}\int\limits_0^{l_1}\left(\mu_1(x)e^{\frac{k\pi l_2}{l_1}}-\mu_2(x)\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx,$$

Таким образом, функция $V(x,y)$ построена.

Функция $W(x,y)$ строится точно таким же способом. В результате оказывается, что

$$W(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{\frac{k\pi x}{l_2}}+D_k e^{-\frac{k\pi x}{l_2}}\right)\sin\frac{k\pi y}{l_2},$$

$$C_k = \frac{1}{l_2 \operatorname{sh} \dfrac{k\pi l_1}{l_2}} \int\limits_0^{l_1} \left(\mu_4(y) - \mu_3(x) e^{-\frac{k\pi l_1}{l_2}} \right) \sin \frac{k\pi y}{l_2} dy,$$

$$D_k = \frac{1}{l_2 \operatorname{sh} \dfrac{k\pi l_1}{l_2}} \int\limits_0^{l_2} \left(\mu_3(y) e^{\frac{k\pi l_1}{l_2}} - \mu_4(y) \right) \sin \frac{k\pi y}{l_2} dy,$$

Итак,

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi y}{l_1}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{l_1}} \right) \sin \frac{k\pi x}{l_1} +$$

$$+ \left(C_k e^{\frac{k\pi x}{l_2}} + D_k e^{-\frac{k\pi x}{l_2}} \right) \sin \frac{k\pi y}{l_2},$$

где коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k находятся по полученным выше формулам.

II. Теперь перейдем к уравнению Пуассона. Здесь задача ставится так:

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x,y) \quad (0 \leqslant x \leqslant l_1, \ \ 0 \leqslant y \leqslant l_2),$$

$$U(0,y) = \mu_1(y), \quad U(l_1,y) = \mu_2(y),$$

$$U(x,0) = \mu_3(x), \quad U(x,l_2) = \mu_4(x).$$

Опять ищем решение в виде суммы двух функций:

$$U(x,y) = V(x,y) + W(x,y),$$

являющихся решениями таких задач:

$$V_{xx} + V_{yy} = f(x,y) \quad (0 \leqslant x \leqslant l_1, \ \ 0 \leqslant y \leqslant l_2),$$

$$V(0,y) = 0, \quad V(l_1,y) = 0,$$

$$V(x,0) = 0, \quad V(x,l_2) = 0$$

и

$$W_{xx} + W_{yy} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l_1, \ \ 0 \leqslant y \leqslant l_2),$$

$$W(0,y) = \mu_1(y), \quad W(l_1,y) = \mu_2(y),$$

$$W(x,0) = \mu_3(x), \quad W(x,l_2) = \mu_4(x).$$

Ясно, что в этом случае сумма функций $V(x,y)$ и $W(x,y)$ будет решением исходной задачи.

Начнем с поиска $V(x,y)$. Будем искать $V(x,y)$ в виде двойного ряда:

$$V(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty} v_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Очевидно, что для $V(x,y)$ краевые условия выполняются при любых значениях коэффициентов v_{km}. Чтобы найти коэффициенты v_{km}, подставим наш ряд в уравнение:

$$-\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(\frac{k^2\pi^2}{l_1^2}+\frac{m^2\pi^2}{l_2^2}\right)v_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}=f(x,y).$$

Видно, что величины $-\left(\frac{k^2\pi^2}{l_1^2}+\frac{m^2\pi^2}{l_2^2}\right)v_{km}$ должны быть коэффициентами в разложении $f(x,y)$ в двойной ряд Фурье по функциям $\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}$. Поэтому

$$\left(\frac{k^2\pi^2}{l_1^2}+\frac{m^2\pi^2}{l_2^2}\right)v_{km}=\frac{-4}{l_1 l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy.$$

Отсюда

$$v_{km}=\frac{-4l_1l_2}{\pi^2(k^2l_1^2+m^2l_2^2)}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy.$$

Итак, функцию $V(x,y)$ мы нашли.

Обратимся к $W(x,y)$. Условия, из которых находится $W(x,y)$, означают, что $w(x,y)$ должно быть решением уравнения Лапласа для прямоугольника. Это решение мы построили в первой части раздела. Используя его мы теперь можем написать, что

$$U(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty} v_{km}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{l_1}}+B_k e^{-\frac{k\pi y}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}+$$

$$+\left(C_k e^{\frac{k\pi x}{l_2}} + D_k e^{-\frac{k\pi x}{l_2}}\right)\sin\frac{k\pi y}{l_2},$$

где

$$v_{km} = \frac{-4l_1l_2}{\pi^2(k^2l_1^2+m^2l_2^2)}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}dxdy,$$

$$A_k = \frac{1}{l_1\,\mathrm{sh}\,\dfrac{k\pi l_2}{l_1}}\int\limits_0^{l_1}\left(\mu_2(x) - \mu_1(x)e^{-\frac{k\pi l_2}{l_1}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx,$$

$$B_k = \frac{1}{l_1\,\mathrm{sh}\,\dfrac{k\pi l_2}{l_1}}\int\limits_0^{l_1}\left(\mu_1(x)e^{\frac{k\pi l_2}{l_1}} - \mu_2(x)\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}dx,$$

$$C_k = \frac{1}{l_2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{k\pi l_1}{l_2}}\int\limits_0^{l_1}\left(\mu_4(y) - \mu_3(x)e^{-\frac{k\pi l_1}{l_2}}\right)\sin\frac{k\pi y}{l_2}dy,$$

$$D_k = \frac{1}{l_2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{k\pi l_1}{l_2}}\int\limits_0^{l_2}\left(\mu_3(y)e^{\frac{k\pi l_1}{l_2}} - \mu_4(y)\right)\sin\frac{k\pi y}{l_2}dy.$$

Итак, в предыдущих разделах мы рассмотрели довольно много различных линейных уравнений в частных производных второго порядка. В следующем последнем разделе пособия будет приведена классификация таких уравнений.

30. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми аргументами в общем виде выглядит так:

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU + G = 0. \qquad (*)$$

Будем считать, что все коэффициенты этого уравнения постоянны. Чтобы упростить его уравнение, делают замену аргументов x и y так, чтобы в преобразованном уравнении стал равен нулю хотя бы один из старших коэффициентов: A, B или C. Можно показать (см., например, [3]), что для подбора подходящей замены следует составить и решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0.$$

Это уравнение называют характеристическим уравнением для исходного уравнения в частных производных. Найденные в результате его решения функции $y(x)$ называют характеристиками рассматриваемого уравнения в частных производных.

Очевидно. что характеристическое уравнение эквивалентно паре

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad \text{и} \quad y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Характер этих уравнений и их решений существенно зависит от значения дискриминанта $\Delta = B^2 - AC$. Если $\Delta > 0$, то значения y' в уравнениях оказываются вещественными и различными. Если $\Delta < 0$, то значения y' оказываются комплексно сопряженными. Если $\Delta = 0$, то значения y' одинаковы.

В соответствии со значением Δ различают три типа уравнения $(*)$:

если $\Delta > 0$, то уравнение называют уравнением гиперболического типа;

если $\Delta < 0$ – эллиптического типа;

если $\Delta = 0$ – параболического типа.

Каждому из этих типов соответствуют свои решения $y(x)$ и связанные с этим замены аргумента в уравнении $(*)$. Рассмотрим подробно каждый из типов.

Начнем с уравнения гиперболического типа. Как уже говорилось, при $\Delta = B^2 - AC > 0$, y' принимает два различных вещественных значения, являющихся корнями квадратного уравнения. Обозначим для краткости эти корни λ_1 и λ_2. Тогда

$$y' = \lambda_1 \quad \text{и} \quad y' = \lambda_2,$$

откуда

$$y = \lambda_1 x + c_1 \quad \text{и} \quad y = \lambda_2 x + c_2.$$

Теперь сделаем в уравнении ($*$) замену аргументов:

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x.$$

Тогда

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = -\lambda_1 U_\xi - \lambda_2 U_\eta,$$

$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = U_\xi + U_\eta,$$

$$U_{xx} = -\lambda_1(U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x) - \lambda_2(U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x) =$$

$$= -\lambda_1((-\lambda_1)U_{\xi\xi} - \lambda_2 U_{\xi\eta}) - \lambda_2(-\lambda_1 U_{\eta\xi} - \lambda_2 U_{\eta\eta}) =$$

$$= \lambda_1^2 U_{\xi\xi} + 2\lambda_1\lambda_2 U_{\xi\eta} + \lambda_2^2 U_{\eta\eta}.$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y + U_{\xi\eta}\eta_y + U_{\eta\xi}\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$U_{xy} = -\lambda_1(U_{\xi\xi}\xi_y + U_{\xi\eta}\eta_y) - \lambda_2(U_{\eta\xi}\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y) =$$

$$= -\lambda_1(U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}) - \lambda_2(U_{\eta\xi} + U_{\eta\eta}) =$$

$$= -\lambda_1 U_{\xi\xi} - (\lambda_1 + \lambda_2)U_{\xi\eta} - \lambda_2 U_{\eta\eta}.$$

Полученные выражения для производных подставим в уравнение ($*$). При этом мы будем выписывать только слагаемые с производными второго порядка:

$$A(\lambda_1^2 U_{\xi\xi} + 2\lambda_1\lambda_2 U_{\xi\eta} + \lambda_2^2 U_{\eta\eta}) + 2B(-\lambda_1 U_{\xi\xi} - (\lambda_1 + \lambda_2)U_{\xi\eta} - \lambda_2 U_{\eta\eta}) +$$

$$+ C(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) + ... = 0.$$

Сделаем перегруппировку:

$$U_{\xi\xi}(A\lambda_1^2 - 2B\lambda_1 + C) + 2U_{\xi\eta}(A\lambda_1\lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + C) +$$

$$+ U_{\eta\eta}(A\lambda_2^2 - 2B\lambda_2 + C) ... = 0.$$

Коэффициенты при $U_{\xi\xi}$ и $U_{\eta\eta}$ равны нулю, поскольку λ_1 и λ_1 являются корнями квадратного уравнения. Кроме того, в силу теоремы Виета, $\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{2B}{A}$ и $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{C}{A}$. Поэтому

$$\frac{4(AC - B^2)}{A} U_{\xi\eta} + ... = 0.$$

Разделив все члены уравнения на $\dfrac{4(AC - B^2)}{A}$, приведем его к каноническому виду

$$U_{\xi\eta} + D_1 U_\xi + E_1 U_\eta + F_1 U + G_1 = 0.$$

Тем самым мы упростили уравнение, оставив в нем лишь одну производную второго порядка.

Заметим следующее: если бы мы сделали другую замену, положив $\xi = 2y - (\lambda_1 + \lambda_2)x$, $\eta = (\lambda_2 - \lambda_1)x$, то привели бы исходное уравнение к форме

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + D_1 U_\xi + E_1 U_\eta + F_1 U + G_1 = 0.$$

Такую форму записи тоже называют канонической.

Обратимся к случаю эллиптического уравнения, когда дискриминант $\Delta = B^2 - AC < 0$. В этом случае λ_1 и λ_2 оказываются комплексными сопряженными числами.

Пусть $\lambda_{1,2} = \mu + i\nu$, так что

$$y' = \mu + i\nu, \qquad y' = \mu - i\nu.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$y = \mu x + i\nu x + c_1, \qquad y = \mu x - i\nu x + c_2.$$

Теперь в уравнении ($*$) делаем замену: $\xi = y - \mu x$ и $\eta = \nu x$.

Проведя преобразования аналогичные сделанным выше, приведем уравнение к виду

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + D_1 U_\xi + E_1 U_\eta + F_1 U + G_1 = 0.$$

Это каноническая форма записи эллиптического уравнения.

Перейдем к уравнению параболического типа, у которого дискриминант $\Delta = B^2 - AC = 0$. Поэтому для y' получим лишь одно уравнение: $y' = \dfrac{B}{A}$, откуда $y = \dfrac{B}{A}x + c_1$. Положим $\xi = y - \dfrac{B}{A}x$. Так как второго выражения для y нет, то можем выбрать η произвольным образом. Например, можно взять $\eta = y$. В этом случае уравнение приводится к виду

$$U_{\xi\xi} + D_1 U_\xi + E_1 U_\eta + F_1 U + G_1 = 0.$$

Итак, возможны такие канонические формы записи уравнений второго порядка:

1) гиперболического типа

$$U_{\xi\eta} + DU_\xi + EU_\eta + FU + G = 0.$$

или

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + DU_\xi + EU_\eta + FU + G = 0;$$

2) эллиптического типа

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + DU_\xi + EU_\eta + FU + G = 0;$$

3) параболического типа

$$U_{\xi\xi} + DU_\xi + EU_\eta + FU + G = 0.$$

Укажем одно полезное действие. Если в уравнении сделать замену искомой функции по формуле $V = Ue^{\alpha\xi+\beta\eta}$, то при подходящем выборе постоянных α и β в уравнениях гиперболического и эллиптического типов можно избавиться от первых производных, а в уравнении параболического типа – от одной из первых производных и от функции. Таким образом, уравнения можно привести к такой форме:

1) в гиперболическом случае

$$V_{\xi\eta} + FV + G = 0.$$

или

$$V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + FV + G = 0;$$

2) в эллиптическом случае

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + FV + G = 0;$$

3) в параболическом случае

$$V_{\xi\xi} + EV_\eta + G = 0.$$

П р и м е р 1. $U_{xx} + 5U_{xy} + 4U_{yy} = 0$.

Очевидно, что $\Delta = \dfrac{9}{4} > 0$, т.е. уравнение гиперболического типа.

Составляем характеристическое уравнение:

$$y'^2 - 5y' + 4 = 0.$$

Из него находим $y' = 1$ и $y' = 4$, откуда $y = x + c_1$ и $y = 4x + c_2$.

Теперь заменяем аргументы: $\xi = y - x, \quad \eta = y - 4x$. Тогда

$$U_x = -U_\xi - 4U_\eta, \quad U_y = U_\xi + U_\eta,$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} + 8U_{\xi\eta} + 16U_{\eta\eta}, \quad U_{xy} = -U_{\xi\xi} - 5U_{\xi\eta} - 4U_{\eta\eta},$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим каноническую форму записи:

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Нетрудно понять, что полученное позволят найти общее решение нашего уравнения. Действительно,

$$U = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)$$

или

$$U(x,y) = \varphi_1(y - x) + \varphi_2(y - 4x),$$

где φ_1 и φ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

П р и м е р 2. $U_{xx} - 6U_{xy} + 13U_{yy} + 2U_x + 2U_y = 0.$

Составляем характеристическое уравнение

$$y'^2 + 6y' + 13y = 0,$$

из которого находим $y' = -3 \pm 2i$. Следовательно, это уравнение эллиптического типа. Положим $\xi = y + 3x$ и $\eta = 2x$. Тогда

$$U_x = 3U_\xi + 2U_\eta, \quad U_y = U_\xi,$$

$$U_{xx} = 9U_{\xi\xi} + 12U_{\xi\eta}, \quad U_{xy} = 3U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta}, \quad U_{yy} = U_{\xi\xi}.$$

Поэтому уравнение примет вид

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + 2U_\xi + U_\eta = 0.$$

П р и м е р 3. $U_{xx} + 4U_{xy} + 4U_{yy} + U_x - 8U_y - 6U = 0.$

Опять начинаем с характеристического уравнения:

$$y'^2 - 4y' + 4 = 0.$$

Очевидно, что оно имеет один корень $y' = 2$. Значит исходное уравнение является уравнением параболического типа. Интегрируя, получаем $y = 2x + c$. Затем делаем замену $\xi = y - 2x$, и $\eta = y$. При такой замене

$$U_x = -2U_\xi, \quad U_y = U_\xi + U_\eta,$$

$$U_{xx} = 4U_{\xi\xi}, \quad U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad U_{xy} = -2U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta}.$$

Подставив это в исходное уравнение, приводим его к такому виду:

$$2U_{\eta\eta} - 5U_\xi - 4U_\eta - 3U = 0.$$

Проведем еще упрощение. Пусть $U = ve^{\alpha\xi+\beta\eta}$.

$$U_\xi = (v_\xi + \alpha v)e^{\alpha\xi+\beta\eta}, \quad U_\eta = (v_\eta + \beta v)e^{\alpha\xi+\beta\eta},$$

$$U_{\eta\eta} = (v_{\eta\eta} + 2\beta v_\eta + \beta^2 v)e^{\alpha\xi+\beta\eta}.$$

Подставляя написанное в последнее уравнение, получаем

$$2v_{\eta\eta} - 5v_\xi + (4\beta - 4)v_\eta + (2\beta^2 - 5\alpha - 4\beta - 3)v = 0.$$

Выберем α и β так, чтобы было

$$4\beta - 4 = 0, \qquad 2\beta^2 - 5\alpha - 4\beta - 3 = 0.$$

Очевидно, что $\beta = 1$ и $\alpha = -1$. Тем самым мы привели уравнение к наиболее простому виду:

$$2v_{\eta\eta} - 5v_\xi = 0.$$

Библиографический список

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. – БХВ-Петербург, 2008.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. – БХВ-Петербург, 2010.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: МГУ, Наука, 2005.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Файншмидт Виктор Лейбович, *Тарасова Наталия Вячеславовна*

Некоторые уравнения математической физики

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Компьютерный набор и верстка *В.Л. Файншмидта* и *Н.В. Тарасовой*
Подписано в печать 03.02.2016. Формат 60x84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7.45. Тираж 100 экз. Заказ № 24
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1